

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Arithmétique



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons les lettres codées par les lettres O et E:

D'après l'analyse fréquentielle du texte codé:

" il contient 15,9% de O et 9,4% de E "

Or: • la fréquence associée à la lettre E est de 15,87%,

• la fréquence associée à la lettre A est de 9,42%.

Et: • $15,9\% \approx 15,87\%$,

• $9,4\% \approx 9,42\%$.

Ainsi: les lettres codées par O et E sont respectivement E et A.

2. Montrons que les entiers a et b sont bien solutions du système:

Nous savons, grâce à la question précédente que:

• E est codée par O,
 $(n = 4)$ $(n = 14)$

• A est codée par E.
 $(n = 0)$ $(n = 4)$

Ainsi, nous pouvons écrire:

$$\begin{cases} a \times 4 + b \equiv 14 [26] \\ a \times 0 + b \equiv 4 [26] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b \equiv 14 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases}$$

Au total, a et b sont bien solutions du système: $\begin{cases} 4a + b \equiv 14 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases}$.

3. Résolvons le système:

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a \equiv 10 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases}$$

- $b = 4$ car: $0 \leq b \leq 25$ et $b \equiv 4 [26]$
- Pour déterminer les valeurs de " a ", nous allons dresser un tableau avec 3 colonnes:

a	$4a$	$4a [26]$
0	0	0
1	4	4
2	8	8
3	12	12
4	16	16
5	20	20
6	24	24
7	28	2
8	32	6
9	36	10
10	40	14
11	44	18
12	48	22

13	52	0
14	56	4
15	60	8
16	64	12
17	68	16
18	72	20
19	76	24
20	80	2
21	84	6
22	88	10
23	92	14
24	96	18
25	100	22

Pour deux valeurs de "a": $a=9$ et $a=22$, l'équation $4a \equiv 10 [26]$ est vérifiée.

Au total, deux couples sont solutions du système: $(9; 4)$ et $(22; 4)$.

Partie B:

1. a. Codons les lettres K et X:

Ici: $an + b = 22n + 4$, car on choisit $a = 22$ et $b = 4$.

1. a. a1. En ce qui concerne K:

La lettre K a pour entier associé: $n = 10$.

D'où: $22n + 4 = 22 \times 10 + 4 \Leftrightarrow 22n + 4 = 224$

$\Leftrightarrow 22n + 4 = 8 \times 26 + 16$.

Dans ces conditions: $22n + 4 \equiv 16 [26]$.

Ainsi: la lettre K est codée par la lettre Q ($n = 16$).

1. a. a2. En ce qui concerne X:

La lettre X a pour entier associé: $n = 23$.

D'où: $22n + 4 = 22 \times 23 + 4 \Leftrightarrow 22n + 4 = 510$

$$\Leftrightarrow 22n + 4 = 19 \times 26 + 16.$$

Dans ces conditions: $22n + 4 \equiv 16 [26]$.

Ainsi: la lettre X est codée par la lettre Q ($n = 16$).

1. b. Ce codage est-il envisageable ?

Non, il n'est pas envisageable car K et X, deux lettres différentes, sont codées par la même lettre Q.

2. a. Montrons que pour tous les entiers naturels " n " et " m ", l'équivalence est bien vérifiée:

• Montrons: $m \equiv 9n + 4 [26] \Rightarrow n \equiv 3m + 14 [26]$.

$$m \equiv 9n + 4 [26] \Rightarrow 3m \equiv 27n + 12 [26]$$

$$\Rightarrow 3m + 14 \equiv 27n + 26 [26]$$

$$\Rightarrow 3m + 14 \equiv 26n + n + 26 [26]$$

$$\Rightarrow 3m + 14 \equiv 26(n + 1) + n [26]$$

$$\Rightarrow 3m + 14 \equiv n [26]$$

$$\Rightarrow n \equiv 3m + 14 [26].$$

• Montrons: $n \equiv 3m + 14 [26] \Rightarrow m \equiv 9n + 4 [26]$.

$$n \equiv 3m + 14 [26] \Rightarrow 9n \equiv 27m + 126 [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv 27m + 130 [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv 26m + m + 130 [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv 26m + m + (5 \times 26) [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv 26(m + 5) + m [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv m [26]$$

$$\Rightarrow m \equiv 9n + 4 [26].$$

Au total: $m \equiv 9n + 4 [26] \Leftrightarrow n \equiv 3m + 14 [26]$.

2. b. Décodons le mot AQ:

Le décodage du mot AQ est: OK.

(en ayant recours à la question précédente)