Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 13

CORRECTION

1. a. Complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

1. b. Justifions que le numéro de la carte est correct:

Le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct ssi:

$S = I + P + c$ est un multiple de 10.

Or:
- $I = 26$ (question précédente),
- $P = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} = 23$,
- $c = 1$.

Dans ces conditions: $S = 26 + 23 + 1$ => $S = 50 = 5 \times 10$.

Au total, comme S est un multiple de 10:

le numéro de la carte est correct.

1. c. Déterminons " a " tel que la carte 6a35 4002 9561 3411 soit correct:

Le numéro de la carte 6a35 4002 9561 3411 est correct ssi:

$S = I + P + c$ est un multiple de 10.

Or ici: • $I = 26 + 2 = 28$, car dans le cas de cette carte, la 1ère colonne du tableau s'écrit:

k	0
a_{2k+1}	6
$2a_{2k+1}$	12
R	3
I	$3 = 1 + 2$

,

• $P = a + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14}$

$= a + 17$,

• $c = 1$.

D'où: $S = 28 + a + 17 + 1$ => $S = 46 + a$.

Ainsi, comme S doit être un multiple de 10 et que $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$: nous pouvons affirmer que " a " doit être égal à 4 pour que la nouvelle carte soit correcte.

2. Montrons qu'il existe une clé " c " rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique:

Le numéro de la carte est correct ssi: $S = I + P + c$ est un multiple de 10.

Posons: $I + P = (10 \times x) + y$.

D'après l'énoncé, nous savons que: $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Dans ces conditions, S est un multiple de 10 ssi:

$y + c$ est un multiple de 10.

Distinguons deux cas sachant que la valeur maximale que peut prendre **c** est " **9** ".

1er cas: si $y = 0$, alors une seule solution pour c: $c = 0$.

2e cas: si $y \neq 0$ cad $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, alors une seule solution pour c: $c = 10 - y$.

Au total: il existe bien une clé " c " rendant ce numéro de carte correct et cette clé est unique.

3. Donnons tous les numéros de carte possibles qui sont corrects sachant que leurs chiffres sont tous égaux:

Soit une carte dont le numéro est composé de chiffres tous égaux:

FFFF FFFF FFFF FFFF.

F peut prendre les valeurs: $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Nous allons calculer " S " pour les différentes valeurs de **F**.

- quand $F = 0$: $S = 0$, **(multiple de 10)**
- quand $F = 1$: $S = 24$,
- quand $F = 2$: $S = 48$,
- quand $F = 3$: $S = 72$,

- quand $F = 4$: $S = 96$,
- quand $F = 5$: $S = 48$,
- quand $F = 6$: $S = 72$,
- quand $F = 7$: $S = 96$,
- quand $F = 8$: $S = 120$, **(multiple de 10)**
- quand $F = 9$: $S = 72$.

Au total, 2 numéros de carte sont possibles:

- **0000 0000 0000 0000**
- **8888 8888 8888 8888**.

4. Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

Non, nous ne pouvons pas déterminer l'autre chiffre permuté.