Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 12

CORRECTION

1. Déterminons les matrices A et B:

En ayant recours à la méthode de l'énoncé, nous avons:

- $A = G \times D \iff A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- $B = D \times G \iff B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Au total: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrons que dans cette association, le trajet aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\frac{3}{5}$:

Le trajet " gauche-droite-gauche " a pour matrice:

$W = G \times D \times G \iff W = A \times G$

$$\iff W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, nous obtenons la fraction:

$$\frac{2+1}{3+2} \text{ cad } \frac{3}{5}.$$

3. a. Montrons que si $ad - bc = 1$, alors $d\,(a + c) - c\,(b + d) = 1$:

Si $ad - bc = 1$, alors:
$$d\,(a + c) - c\,(b + d) = da + dc - cb - cd$$
$$= (ad - bc) + (dc - cd)$$
$$= 1 + 0$$
$$= 1.$$

Au total: si $ad - bc = 1$, alors $d\,(a + c) - c\,(b + d) = 1$.

3. b. Déduisons-en que si $\Delta_M = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$:

Nous avons:

• $\Delta_M = 1 \iff ad - bc = 1$.

• $M \times G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & c \\ b + d & d \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions:
$$\Delta_{M \times G} = d\,(a + c) - c\,(b + d)$$
$$= 1\text{, d'après 3. a.}$$

Ainsi: si $\Delta_M = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$.

4. Déduisons-en que toute fraction associée à une matrice de l'arbre est irréductible:

On suppose que: a, b, c et $d \in \mathbb{N}$ avec $b + d \neq 0$.

D'après la question précédente: $d\,(a + c) - c\,(b + d) = 1$.

Dans ces conditions: un entier naturel non nul, diviseur commun à $a + c$ et $b + d$ est égal à 1: $\text{PGCD}\,(a + c\,;\, b + d) = 1$.

D'où, les entiers naturels non nuls " $a + c$ " et " $b + d$ " sont premiers entre eux: **la fraction $\dfrac{a + c}{b + d}$ est donc irréductible**.

Au total: toute fraction associée à une matrice de l'arbre de **Stern-Brocot** est irréductible.

5. a. Recopions et complétons le tableau:

Nous obtenons le tableau suivant:

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

5. b. b1. Conjecturons le rôle de cet algorithme:

La conjecture que nous pouvons émettre est:

" l'algo. semble founir un chemin dans l'arbre de **Stern-Brocot** faisant passer de la matrice identité $I_2 = I$ à une matrice dont la fraction associée est $\frac{m}{n}$ ".

5. b. b2. Vérifions par un calcul matriciel le résultat fourni avec $m = 4$ et $n = 7$:

En passant par le chemin G-D-G-G, on obtient une matrice dont la fraction associée est: $\frac{4}{7}$.

Via un calcul matriciel:

$$G \times D \times G \times G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = Y.$$

Et la fraction associée à la matrice Y est: $\frac{3+1}{5+2} = \frac{4}{7}$.

Au total: vérification faite.