Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 11

CORRECTION

1. **Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = 9 \times 2^n - 6$:**

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = 9 \times 2^n - 6$ ".

Initialisation: • $U_0 = 9 \times 2^0 - 6$?

oui car: $9 \times 2^0 - 6 = 3$,

et: $U_0 = 3$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que, pour tout entier naturel n, $U_n = 9 \times 2^n - 6$ et montrons qu'alors $U_{n+1} = 9 \times 2^{(n+1)} - 6$.

Supposons: $\underbrace{U_n = 9 \times 2^n - 6}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

(1) => $2 \times U_n = 9 \times 2^{(n+1)} - 12$

=> $2 \times U_n + 6 = 9 \times 2^{(n+1)} - 12 + 6$

=> $2 \times U_n + 6 = 9 \times 2^{(n+1)} - 6$

=> $U_{n+1} = 9 \times 2^{(n+1)} - 6$.

Conclusion: pour tout entier naturel n, nous avons: $U_n = 9 \times 2^n - 6$.

2. Montrons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, U_n est divisible par 6:

Pour tout entier $n \geqslant 1$: $U_n = 9 \times 2^n - 6 \iff U_n = 18 \times 2^{(n-1)} - 6$

$\Rightarrow U_n = 6 \times [\, 3 \times 2^{(n-1)} - 1 \,]$.

Or: $[\, 3 \times 2^{(n-1)} - 1 \,]$ est un entier relatif pour tout entier $n \geqslant 1$.

Par conséquent: pour tout entier $n \geqslant 1$, U_n est bien divisible par 6.

3. Indiquons si cette affirmation est vraie ou fausse:

Ici, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $V_n = \dfrac{U_n}{6} \iff V_n = 3 \times 2^{(n-1)} - 1$.

Nous allons montrer que cette affirmation est fausse en prenant un contre exemple.

En effet, en prenant **n = 6**: $V_6 = 3 \times 2^5 - 1 \iff V_6 = 95$

$\iff V_6 = 5 \times 19$.

Ainsi: V_6 n'est pas un nombre premier.

Par conséquent, nous pouvons dire que: l'affirmation est **fausse**.

4. a. Montrons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_{n+1} - 2\,V_n = 1$:

$V_{n+1} - 2\,V_n = [\, 3 \times 2^{(n+1-1)} - 1 \,] - 2 \times [\, 3 \times 2^{(n-1)} - 1 \,]$

$= [\, 3 \times 2^n - 1 \,] - [\, 3 \times 2^n - 2 \,]$

$= 1$.

Au total: pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons bien: $V_{n+1} - 2 \times V_n = 1$.

4. b. Déduisons-en que pour tout entier $n \geqslant 1$, V_n et V_{n+1} sont premiers entre eux:

Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le théorème de **BÉZOUT**.

D'après ce théorème: " Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux ssi il existe deux entiers u et v tels que: $a \cdot u + b \cdot v = 1$ ".

Ici: $V_{n+1} - 2 \times V_n = 1 \iff V_n \times (-2) + V_{n+1} \times (1) = 1$

$\iff V_n \times u + V_{n+1} \times v = 1$, avec: $u = -2$ et $v = 1$.

Comme V_n et V_{n+1} sont deux entiers relatifs non nuls, nous pouvons affirmer qu'ils sont premiers entre eux car: il existe bien deux entiers relatifs u (= -2) et v (= 1) tels que $V_n \times u + V_{n+1} \times v = 1$.

Au total: pour tout entier $n \geqslant 1$, V_n et V_{n+1} sont bien premiers entre eux.

4. c. Déduisons-en, pour tout entier $n \geqslant 1$, PGCD $(U_n ; U_{n+1})$:

D'après la question précédente, nous savons que pour tout entier $n \geqslant 1$, V_n et V_{n+1} sont premiers entre eux.

Dans ces conditions: PGCD $(V_n ; V_{n+1}) = 1$.

D'où: PGCD $(U_n ; U_{n+1}) =$ PGCD $(6V_n ; 6V_{n+1})$, car $V_n = \dfrac{U_n}{6}$

$= 6 \times$ PGCD $(V_n ; V_{n+1})$

$= 6 \times 1 = 6$.

Au total: pour tout entier $n \geqslant 1$, PGCD $(U_n ; U_{n+1}) = 6$.

5. a. Vérifions que $2^4 \equiv 1 \, [5]$:

$2^4 = 16$ et $16 = 3 \times 5 + 1$.

Donc: $2^4 \equiv 1 [5]$.

Au total, nous avons bien: $2^4 \equiv 1 [5]$.

5. b. Déduisons-en que si $n = 4k + 2$ ($k \in -$) alors U_n est divisible par 5:

Si $n = 4k + 2$, alors: $U_n = 9 \times 2^{(4k+2)} - 6$

$\Rightarrow U_n = 9 \times 4 \times 2^{(4k)} - 6$

$\Rightarrow U_n = 36 \times (2^4)^k - 6$.

Or: $2^4 \equiv 1 [5]$.

D'où: $U_n \equiv 36 \times (1)^k - 6 [5]$

$\Rightarrow U_n \equiv 36 - 6 [5]$

$\Rightarrow U_n \equiv 30 [5]$ cad $U_n \equiv 0 [5]$.

Au total si $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) alors: U_n est bien divisible par 5 **car** $U_n \equiv 0 [5]$.

5. c. Le nombre U_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de $n \in -$?

La réponse est: **non**.

Et nous allons prendre un contre-exemple pour le justifier.

Soit: $n = 4k + 7$, $U_n = 9 \times 2^7 \times (2^4)^k - 6$

$\Leftrightarrow U_n = 1\,152 \times (2^4)^k - 6$.

Dans ces conditions: $U_n \equiv 1\,152 - 6 [5]$, car $(2^4) \equiv 1 [5]$,

cad: $U_n \equiv 1 [5]$ $(1\,152 - 6 = 229 \times 5 + 1)$.

Ainsi: si $n = 4k + 7$, U_n n'est pas divisible par 5 car $U_n \equiv 1 [5]$.