

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Arithmétique



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».

Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4.

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

c. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .

5.

a. Vérifier que $2^4 \equiv 1 [5]$.

b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.