Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 1

CORRECTION

Partie A: Exemples de matrices appartenant à S

1. Vérifions que la matrice $A \in S$:

Ici: • $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

• $6, 5, -5$ et -4 appartiennent à $\mathbb{Z}$;

• $ad - bc = [6 \times (-4)] - [5 \times (-5)] = 1$.

Donc, nous pouvons affirmer que: A appartient à l'ensemble S.

2. Montrons qu'il existe exactement 4 matrices appartenant à S qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$:

Ici: • $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

• $a, 2, 3$ et d appartiennent à $\mathbb{Z}$;

• $ad - bc = ad - 6$.

Ainsi, A appartient à l'ensemble S ssi: $ad - 6 = 1$ cad: $ad = 7$.

Comme " a " et " d " appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs, nous pouvons distinguer 4 cas de figure:

- $a = 1$ et $d = 7$
- $a = 7$ et $d = 1$
- $a = -1$ et $d = -7$
- $a = -7$ et $d = -1$.

En conclusion, il existe exactement 4 matrices appartenant à S de la forme

$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ qui sont:

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,
- $A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$,
- $A_4 = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. a. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) $5x - 2y = 1$:

Nous devons donc résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation: $5x - 2y = 1$ (E), sachant qu'une solution particulière est $(1 ; 2)$.

D'après le théorème de **BÉZOUT**, l'équation (E) admet au moins un couple solution.

• Soit un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

D'où: $5x - 2y = 1$.

Or nous savons que le couple $(1; 2)$ est une solution particulière de l'équation (E).

D'où: $5 \times 1 - 2 \times 2 = 1$.

Nous pouvons ainsi écrire: $5x - 2y = 5 \times 1 - 2 \times 2$

$\iff 5(x - 1) = 2(y - 2)$.

➔ Comme 5 et 2 sont premiers entre eux, d'après le théorème de **GAUSS**, l'entier 2 divise $x - 1$.

Par conséquent, il existe nécessairement un entier relatif p tel que:

$x - 1 = 2 \times p$ **cad**: $\boldsymbol{x = 1 + 2 \times p}$.

➔ De même, comme 5 et 2 sont premiers entre eux, d'après le théorème de **GAUSS**, l'entier 5 divise $y - 2$.

Par conséquent, il existe nécessairement un entier relatif p' tel que:

$y - 2 = 5 \times p'$ **cad**: $\boldsymbol{y = 2 + 5 \times p'}$.

• **Réciproque**:

Soient p et p' deux entiers relatifs et: $x = 1 + 2 \times p$ et $y = 2 + 5 \times p'$.

Dans ces conditions: $5x - 2y = 1 \iff 5(1 + 2 \times p) - 2(2 + 5 \times p') = 1$

$\iff 10(p - p') = 0$

$\iff \boldsymbol{p = p'}$.

Au total, les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont de la forme: $\boldsymbol{x = 1 + 2p}$ **et** $\boldsymbol{y = 2 + 5p'}$, **avec** $\boldsymbol{p = p'}$.

Ils sont donc de la forme: $x = 1 + 2p$ et $y = 2 + 5p,\ p \in \mathbb{Z}$.

3. b. Déduisons-en qu'il existe une infinité de matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à S:

Ici: • $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

• a, b, 2 et 5 appartiennent à $\mathbb{Z}$;

• $ad - bc = 5a - 2b$.

Ainsi, A appartient à l'ensemble S ssi: $5a - 2b = 1$ (E').

Or, d'après la question précédente, les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E') sont de la forme: $a = 1 + 2p$ et $b = 2 + 5p,\ p \in \mathbb{Z}$.

D'où, il existe une infinité de matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ appartenant à S avec:

$$a = 1 + 2p \text{ et } b = 2 + 5p,\ p \in \mathbb{Z}.$$

Et ces matrices s'écrivent sous la forme: $A = \begin{pmatrix} 1 + 2p & 2 + 5p \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ p \in \mathbb{Z}$.

Partie B: Propriétés des matrices appartenant à S

1. Montrons que les entiers a et b sont premiers entre eux:

Nous avons: $ad - bc = 1$ et donc, d'après le théorème de **BÉZOUT**, nous pouvons affirmer que: les entiers a et b sont premiers entre eux.

Ainsi: **oui**, les entiers a et b sont premiers entre eux.

2. a. Calculons AB:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + da \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \text{ car: } ad - bc = 1.$$

Ainsi: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. b. Déduisons-en que la matrice A est inversible et déterminons A^{-1}:

A est inversible ssi: $ad - bc \neq 0$.

Or ici: $ad - bc = 1 \neq 0$.

Donc: A est inversible.

De plus, comme la matrice A est inversible, nous pouvons écrire:

$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_2$, I_2 étant la matrice identité.

Or ici, par hypothèse: $AB = BA$.

D'où: $AB = BA = I_2$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que: $A^{-1} = B$.

Au total: A est inversible et $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2. c. Montrons que A^{-1} appartient à l'ensemble S:

Ici: • $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

• $d, -b, -c$ et a appartiennent à $\mathbb{Z}$ car a, b, c et $d \in \mathbb{Z}$;

• $ad - bc = da - cb = 1$.

A^{-1} appartient donc à l'ensemble S.

Au total: **oui**, A^{-1} appartient à l'ensemble S.

3. a. Montrons que $x = d \cdot x' - b \cdot y'$:

D'après l'énoncé: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff X' = AX$, avec $X' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$$X' = AX \iff A^{-1} X' = A^{-1} AX$$

$$\iff A^{-1} X' = I_2 X \quad [\text{ car: } A^{-1} A = A A^{-1} = I_2]$$

$$\iff X = A^{-1} X'$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = d \cdot x' - b \cdot y' \\ y = -c \cdot x' + a \cdot y' \end{cases}.$$

En conclusion, nous avons bien: $x = d \cdot x' - b \cdot y'$.

3. b. Montrons que D = D':

Notons que:
- D = PGCD $(x ; y)$,
- D' = PGCD $(x' ; y')$.

→ D' divise à la fois x' et y', il divise donc également: $x = d \cdot x' - b \cdot y'$
et: $y = a \cdot y' - c \cdot x'$.

Par conséquent: D' divise D.

→ D divise à la fois x et y, il divise donc également: $x' = a \cdot x + b \cdot y$
et: $y' = c \cdot x + d \cdot y$.

Par conséquent: D divise D'.

Au total, nous pouvons donc affirmer que: D = D'.

4. Déterminons, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n:

Notons que: $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$, avec $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2019 \\ 673 \end{pmatrix}$.

Soient: • $D = PGCD\,(x_{n+1}\,;\,y_{n+1})$,

• $D' = PGCD\,(x_n\,;\,y_n)$.

D'après la question précédente, nous savons que: $D = D'$.

Donc: $PGCD\,(x_{n+1}\,;\,y_{n+1}) = PGCD\,(x_n\,;\,y_n) = \ldots = PGCD\,(x_0\,;\,y_0)$.

Ainsi: $PGCD\,(x_n\,;\,y_n) = PGCD\,(x_0\,;\,y_0) = PGCD\,(2019\,;\,673) = 673$,

[car: $2019 = 3 \times 673$.]

Au total: pour tout entier x_n et y_n, $PGCD\,(x_n\,;\,y_n) = \mathbf{673}$.