

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Divisibilité
Division euclidienne



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$$xy - 5x - 5y - 7 = 0$$

CORRECTION

1. Montrons que l'équation (I) équivaut $(x - 5)(y - 5) = 32$:

Soit (I) l'équation dans \mathbb{N} définie par: $xy - 5x - 5y - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} xy - 5x - 5y - 7 = 0 &\Leftrightarrow x(y - 5) - 5y - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(y - 5) - 5y - 7 + 25 = 25 \\ &\Leftrightarrow x(y - 5) - 5y + 25 = 32 \\ &\Leftrightarrow x(y - 5) - 5(y - 5) = 32 \\ &\Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien: $(I) \Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32$.

2. Résolvons l'équation (I):

Résoudre l'équation (I) revient à résoudre dans \mathbb{N} : $(x - 5)(y - 5) = 32$.

- Soient x et y deux entiers naturels.

Nous avons: $(x - 5)(y - 5) = 32$.

Nous allons distinguer deux cas:

Premier cas: $(x - 5) > (y - 5) \Leftrightarrow x > y$.

Comme x et $y \in \mathbb{N}$ avec $x > 5$ et $y > 5$:

- $x - 5 > 0$
- $y - 5 > 0$
- $x - 5 > y - 5$ car $x > y$.

Donc les termes $(x - 5)$ et $(y - 5)$ sont strictement positifs et sont des diviseurs positifs de 32 avec:

$$(x - 5) > (y - 5).$$

Les diviseurs de 32 dans \mathbb{N} sont: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Nous pouvons donc écrire: $1|32, 2|32, 4|32, 8|32, 16|32$ et $32|32$.

Et par conséquent, nous avons:

$$\begin{cases} x - 5 = 32 \\ y - 5 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 5 = 16 \\ y - 5 = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 5 = 8 \\ y - 5 = 4 \end{cases} \quad (x - 5 > y - 5).$$

Dans ces conditions, nous obtenons: $\begin{cases} x = 37 \\ y = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 21 \\ y = 7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 13 \\ y = 9 \end{cases}$.

Second cas: $(x - 5) < (y - 5) \Leftrightarrow x < y$.

Comme x et $y \in \mathbb{N}$ avec $x > 5$ et $y > 5$:

- $x - 5 > 0$

- $y - 5 > 0$
- $x - 5 < y - 5$ car $x < y$.

Donc les termes $(x - 5)$ et $(y - 5)$ sont strictement positifs et sont des diviseurs positifs de 32 avec:

$$(x - 5) < (y - 5).$$

Les diviseurs de 32 dans \mathbb{N} sont: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Nous pouvons donc écrire: $1|32, 2|32, 4|32, 8|32, 16|32$ et $32|32$.

Et par conséquent, nous avons:

$$\begin{cases} x - 5 = 1 \\ y - 5 = 32 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - 5 = 2 \\ y - 5 = 16 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - 5 = 4 \\ y - 5 = 8 \end{cases} \quad (x - 5 < y - 5).$$

Dans ces conditions, nous obtenons: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 37 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 7 \\ y = 21 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 9 \\ y = 13 \end{cases}$.

- Réciproquement, les couples $(37; 6), (21; 7), (13; 9), (6; 37), (7; 21)$ et $(9; 13)$ vérifient l'équation: $(x - 5)(y - 5) = 32$.

Au total, les couples d'entiers $(x; y)$ solutions de l'équation $(x - 5)(y - 5) = 32$ sont: $(37; 6), (21; 7), (13; 9), (6; 37), (7; 21)$ et $(9; 13)$.