Maths Expertes
Terminale

Divisibilité
Division euclidienne

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$(x + 2y)(2x - 3y) = 15$

CORRECTION

Déterminons les entiers naturels x et y ($x < 5y$) tels que $(x + 2y)(2x - 3y) = 15$:

- Soient x et y deux entiers naturels.

Nous avons: $(x + 2y)(2x - 3y) = 15$.

Comme x et $y \in \mathbb{N}$: • $x + 2y > 0$,

• $x + 2y > 2x - 3y$ car $x < 5y$.

Donc le terme $(2x - 3y)$ doit être strictement positif car: $(x + 2y)(2x - 3y) = 15 > 0$.

De plus, $(x + 2y)$ et $(2x - 3y)$ sont des diviseurs positifs de 15 avec:

$$(x + 2y) > (2x - 3y).$$

Les **diviseurs** de 15 dans $\mathbb{N}$ sont: **1, 3, 5, 15**.

Nous pouvons donc écrire: $1 \mid 15$, $3 \mid 15$, $5 \mid 15$ et $15 \mid 15$.

Et par conséquent, nous avons:

$$\begin{cases} x + 2y = 15 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \quad (x + 2y > 2x - 3y).$$

Dans ces conditions, nous obtenons: $\begin{cases} x = \dfrac{47}{7} \\ y = \dfrac{29}{7} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

Comme $\dfrac{47}{7} \notin \mathbb{N}$ et $\dfrac{29}{7} \notin \mathbb{N}$, nous retiendrons uniquement le couple: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

- Réciproquement, le couple $(3\,;\,1)$ vérifie l'équation: $(x + 2y)$ et $(2x - 3y) = 15$.

Au total, le couple d'entiers $(x\,;\,y)$ solution de l'équation $(x + 2y)\,(2x - 3y) = 15$ est: $(3\,;\,1)$.