Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

09

Correction

NB. Voir sur ce même sujet l'exercice numéro 21.

1. a. Cherchons un entier *x* de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vérifiant $3x \equiv 1\ [7]$:

Pour cela, construisons d'abord un tableau de congruence donnant, suivant la valeur de x dans $\{1, 2, 3, 4, 5\ 6\}$, le reste de la division euclidienne de $3x$ par 7 (reste auquel $3x$ est congru modulo 7).

x	1	2	3	4	5	6
$3x \equiv \cdots\ [7]$	3	6	2	5	1	4

L'entier 1 est obtenu dans le tableau une fois et une seule dans la colonne « $x = 5$ ». Nous pouvons en déduire que $3 \times 5 \equiv 1\ [7]$.

5 est l'unique entier de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\ 6\}$ à avoir cette propriété.

1b. Montrons que $3a \equiv 0\ [7]$ si et seulement si $a \equiv 0\ [7]$:

L'implication $a \equiv 0\ [7] \implies 3a \equiv 0\ [7]$ est évidente, car si a est un multiple de 7, tous ses multiples le sont aussi.

Réciproquement, supposons $3a \equiv 0\ [7]$. Multiplions par 5 les deux membres de cette congruence.
Nous obtenons : $5 \times (3a) \equiv 0\ [7]$ soit par associativité : $(5 \times 3)a \equiv 0\ [7]$.
La question 1 a établi que $5 \times 3 \equiv 1\ [7]$, nous en déduisons que $a \equiv 0\ [7]$.
Ainsi, réciproquement, $3a \equiv 0\ [7] \implies a \equiv 0\ [7]$.

Bilan des deux sens de démonstration : $3a \equiv 0\ [7] \iff a \equiv 0\ [7]$.

2.a. Montrons que $N \equiv 3N' \; [7]$:

Soit a et b deux entiers naturels et soit $N = 10a + b$.

L'entier N' associé à N est l'entier $N' = a - 2b$

Calculons la différence : $N - 3N' = (10a + b) - 3(a - 2b) = 7a + 7b = 7 \times (a + b)$

Cette différence est un multiple de 7, donc $N \equiv 3N' \; [7]$.

2.b. Montrons que $N \equiv 0 \; [7]$ si et seulement si $N' \equiv 0 \; [7]$:

Compte tenu de la congruence $N \equiv 3N' \; [7]$, nous avons l'équivalence $N \equiv 0 \; [7]$ si et seulement si $3N' \equiv 0 \; [7]$.

Or la question a démontré (en y considérant l'entier $a = 3N'$) que $3N' \equiv 0 \; [7]$ si et seulement si $N' \equiv 0 \; [7]$.

Donc, nous obtenons l'équivalence : $N \equiv 0 \; [7]$ si et seulement si $N' \equiv 0 \; [7]$.

Expliquons le critère de divisibilité par 7 :

Soit N un nombre s'écrivant en numération décimale : $N = \overline{c_n \ldots c_1 c_0}$

Alors : $N = c_n \times 10^n + \cdots + c_1 \times 10 + c_0 = 10 \times (c_n \times 10^{n-1} + \cdots + c_1) + c_0$

On peut lui associer l'expression $N = 10\,a + b$ avec $a = c_n \times 10^{n-1} + \cdots + c_1$, le nombre de dizaines de N, et $b = c_0$, le chiffre de ses unités puis l'entier $N' = a - 2b$.

Le critère de divisibilité par 7 décrit le remplacement d'un entier N par son associé N' (qui est un nombre plus petit). Ce procédé peut éventuellement être itéré (cas de 6503 ci-dessous). On arrête le processus lorsqu'on aboutit à un nombre dont on sait, notoirement, si c'est un multiple de 7 ou non.

N	406	895	6503	644
N'	$40 - 12 = 28$	$89 - 10 = 79$	$650 - 6 = 644$	$64 - 8 = 56$
Divisible par 7 ?	oui	non	Comme 644	oui