Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

08

Correction

NB. Selon l'énoncé, *x* est un entier relatif et *N* est lié à *x* par la relation : $N = x^2 + x - 2$. Or, le trinôme du second degré $x^2 + x - 2$ se factorise : $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. (On peut en effet remarquer que ce trinôme est pourvu de deux « racines évidentes », 1 et -2).

L'entier *N* est donc défini en fonction de *x*, aussi bien, par la relation : $N = (x-1)(x+2)$.

Sous cette forme, *N* apparaît comme un produit de deux facteurs, et cela va nous aider dans la résolution. On note que, si *x* est un entier relatif, chacun des deux nombres $(x-1)$ et $(x+2)$ est aussi un entier relatif.

De façon équivalente à la définition de l'énoncé, l'entier *N* s'exprime en fonction de *x* comme un produit de deux facteurs : $N = (x-1)(x+2)$.

1. Déterminons l'ensemble E_1 des entiers *x* tels que *N* est divisible par 7 :

Le nombre 7 étant un nombre premier, il divise le produit de deux facteurs $(x-1)(x+2)$ si et seulement si il divise un des deux facteurs.

En conséquence, *N* est divisible par 7 si et seulement si :

- Ou bien $(x-1)$ est divisible par 7, c'est-à-dire, en termes de congruences, $x - 1 \equiv 0 \ [7]$ ou, ce qui revient au même, $x \equiv 1 \ [7]$.
- Ou bien $(x+2)$ est divisible par 7, c'est-à-dire, en termes de congruences, $x + 2 \equiv 0 \ [7]$ ou, ce qui revient au même, $x \equiv -2 \ [7]$.

N est divisible par 7 si et seulement si *x* est de la forme $x = 1 + 7k$ ou de la forme $x = -2 + 7k$ avec *k* entier relatif. $E_1 = \{1 + 7k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-2 + 7k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Déterminons l'ensemble E_2 des entiers *x* tels que *N* est divisible par 3 :

Le nombre 3 étant un nombre premier, il divise le produit de deux facteurs $(x-1)(x+2)$ si et seulement si il divise un des deux facteurs.

Mais notons une différence par rapport à la question précédente : nous remarquons que pour tout entier relatif *x*, $x+2=(x-1)+3$, donc que $x+2 \equiv x-1 \ \ [3]$. Les deux facteurs sont ou bien simultanément divisibles par 3, ou bien simultanément non divisibles par 3.

En conséquence, *N* est divisible par 3 si et seulement si $(x-1)$ est divisible par 3, c'est-à-dire, en termes de congruences, $x-1 \equiv 0 \ \ [3]$ ou, ce qui revient au même, $x \equiv 1 \ \ [3]$.

N est divisible par 3 si et seulement si *x* est de la forme $x = 1+3k$ avec *k* entier relatif.

$E_2 = \{1+3k, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Montrons que si $x = 1+21k$ ou si $x = -2+21k$ avec *k* entier relatif, alors *N* est divisible par 42 :

Décomposons 42 en produit de facteurs premiers : $42 = 2 \times 3 \times 7$.

Les entiers 2, 3 et 7 étant des entiers premiers entre eux deux à deux, leur PPCM est égal à leur produit : un nombre est divisible par leur produit 42 si et seulement si ce nombre est divisible par chacun d'entre eux.

Nous devons donc justifier que N est divisible à la fois par 2, par 3 et par 7.

Montrons que pour tout entier relatif *x*, $N = (x-1)(x+2)$ est toujours divisible par 2 :

Nous avons vu que $x+2=(x-1)+3$. Les entiers $x+2$ et $x-1$ diffèrent d'un nombre impair, ils sont donc de parité différente, l'un est impair et l'autre est pair. Leur produit est toujours un nombre pair : Quel que soit l'entier relatif *x*, *N* est divisible par 2.

Montrons que si $x = 1+21k$, alors N est divisible par 3 et par 7 :

Si $x = 1+21k$, alors : $\begin{cases} x = 1+(3k)\times 7 \ \text{ donc } x \equiv 1 \ \ [7] \\ x = 1+(7k)\times 3 \ \text{ donc } x \equiv 1 \ \ [3] \end{cases}$.

L'entier *x* appartient à l'ensemble $E_1 \cap E_2$.

D'après les résultats des deux questions précédentes, si $x \equiv 1 \ \ [7]$, alors *N* est divisible par 7 et si $x \equiv 1 \ \ [3]$, alors *N* est divisible par 3.

Si $x = 1+21k$ (*k* entier relatif), alors *N* est divisible par 3 et par 7.

Montrons que si $x = -2 + 21k$, alors *N* est divisible par 3 et par 7 :

Si $x = -2 + 21k$, alors :

$$\begin{cases} x = -2 + (3k) \times 7 \ \text{ donc } x \equiv -2 \ [7] \\ x = -2 + (7k) \times 3 = (1 - 3) + (7k) \times 3 = 1 + (7k - 1) \times 7 \ \text{ donc } x \equiv 1 \ [3] \end{cases}.$$

L'entier *x* appartient à l'ensemble $E_1 \cap E_2$.

D'après les résultats des deux questions précédentes, si $x \equiv -2 \ [7]$, alors *N* est divisible par 7 et si $x \equiv 1 \ [3]$, alors *N* est divisible par 3.

Si $x = -2 + 21k$ (*k* entier relatif), alors *N* est divisible par 3 et par 7.

Concluons :

Si *x* est de la forme $x = 1 + 21k$ ou bien de la forme $x = -2 + 21k$ (*k* entier relatif), alors *N* est divisible à la fois par 2, par 3 et par 7. Il est donc divisible par 42.