Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence 07

Correction

NB. Rappelons la compatibilité de la relation de congruence modulo *n* avec les puissances :

Si $a \equiv b \ [n]$, alors pour tout entier naturel *p* : $a^p \equiv b^p \ [n]$.

Avec $n = 9$ et $p = 3$, cette propriété s'énonce ainsi : si $a \equiv b \ [9]$, alors $a^3 \equiv b^3 \ [9]$.

Rappelons aussi le développement du cube d'une somme : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, développement qui nous sera utile dans la « méthode 2 » de la question 1.

1. Déterminons les restes possibles de la division euclidienne de x^3 par 9 :

NB. L'énoncé nous demande de déterminer ces restes « selon les valeurs de *x* » sans autre précision. Nous avons la liberté d'interpréter cette injonction à notre guise. Nous allons proposer deux interprétations, toutes deux légitimes. Cependant, la « méthode 2 » est nettement plus économique que la « méthode 1 », c'est la méthode que nous préférerions.

Méthode 1. Raisonnement par disjonction des cas, en discutant suivant la valeur du reste de la division euclidienne de l'entier relatif *x* par 9.

Il y a 9 cas à considérer. Confions les calculs, quelque peu fastidieux, à un algorithme Python.

L'instruction « $u = (r ** 3)\%9$ » définit le reste de la division euclidienne de r^2 par 9.

```
>>> def congru07():
        for r in range(0,9):
                u=(r**3)%9
                print("si x est congru à", r,"modulo 9, son cube est congru à",u,"modulo 9")

>>> congru07()
si x est congru à 0 modulo 9, son cube est congru à 0 modulo 9
si x est congru à 1 modulo 9, son cube est congru à 1 modulo 9
si x est congru à 2 modulo 9, son cube est congru à 8 modulo 9
si x est congru à 3 modulo 9, son cube est congru à 0 modulo 9
si x est congru à 4 modulo 9, son cube est congru à 1 modulo 9
si x est congru à 5 modulo 9, son cube est congru à 8 modulo 9
si x est congru à 6 modulo 9, son cube est congru à 0 modulo 9
si x est congru à 7 modulo 9, son cube est congru à 1 modulo 9
si x est congru à 8 modulo 9, son cube est congru à 8 modulo 9
```

Bilan :

Nous trouvons trois restes possibles, soit 0, soit 1, soit 8.

Méthode 2. Raisonnement par disjonction des cas, en discutant suivant la valeur du reste de la division euclidienne de *x* par 3.

La méthode précédente nous amène à conjecturer qu'une congruence modulo 3 portant sur l'entier relatif *x* en implique une autre modulo 9 portant sur son cube x^3. Cette interprétation présente un avantage incontestable par rapport à l'interprétation précédente : nous avons seulement trois cas de figure à étudier, un entier relatif peut être congru à 0, ou à 1, ou à 2 modulo 3.

Premier cas : $\boldsymbol{x \equiv 0\ [3]}$. D'après la définition de la relation de congruence modulo 3, il existe un entier relatif *k* tel que $x = 3k$. Alors $x^3 = 27k^3 = 9 \times (3k^2)$,

L'entier x^3 est un multiple de 9, nous obtenons la congruence $x^3 \equiv 0\ [9]$.

Le reste de la division euclidienne de x^3 par 9 est égal à 0.

Deuxième cas : $\boldsymbol{x \equiv 1\ [3]}$. D'après la définition de la relation de congruence modulo 3, il existe un entier relatif *k* tel que $x = 1 + 3k$.

Alors $x^3 = (1 + 3k)^3 = 1 + 3 \times (3k) + 3 \times (9k^2) + 27k^3 = 1 + 9 \times (k + 3k^2 + 3k^3)$.

Il existe un entier *K*, en l'occurrence $K = k + 3k^2 + 3k^3$ tel que $x^3 = 1 + 9K$, donc $x^3 \equiv 1\ [9]$.

Le reste de la division euclidienne de x^3 par 9 est égal à 1.

Troisième cas : $\boldsymbol{x \equiv 2\ [3]}$. D'après la définition de la relation de congruence modulo 3, il existe un entier relatif *k* tel que $x = 2 + 3k$.

Alors $x^3 = (2 + 3k)^3 = 8 + 3 \times 4 \times (3k) + 3 \times 2 \times (9k^2) + 27k^3 = 8 + 9 \times (4k + 6k^2 + 3k^3)$.

Il existe un entier *K*, en l'occurrence $K = 4k + 6k^2 + 3k^3$ tel que $x^3 = 8 + 9K$, donc $x^3 \equiv 8\ [9]$.

Le reste de la division euclidienne de x^3 par 9 est égal à 8.

Bilan :

Suivant que *x* est congru à 0 ou à 1 ou à 2 modulo 3, son cube est congru à 0 ou à 1 ou à 8 modulo 9.

Autrement dit, suivant que *x* est congru à 0 ou à 1 ou à 2 modulo 3, le reste de la division de x^3 par 9 est égal, respectivement, à 0 ou à 1 ou à 8.

2. Montrons que si une somme de trois cubes est divisible par 9, alors au moins un des trois cubes est divisible par 9 :

Nous allons nous engager dans un **raisonnement par contraposition**[1].

Soit *x, y, z* trois entiers relatifs. Montrons que si aucun des trois entiers *x, y, z* n'est un multiple de 3 alors la somme de leurs cubes $x^3 + y^3 + z^3$ n'est pas un multiple de 9.

Nous avons plusieurs cas de figure à considérer, ces entiers pouvant être congrus à 1 ou à 2, mais non à 0, modulo 3 :

- Ou bien les trois entiers sont tous trois congrus à 1. Alors, en vertu des résultats de la question précédente, la somme des trois cubes est congrue à $1 + 1 + 1 = 3$ modulo 9.
- Ou bien deux d'entre eux sont congrus à 1 et le troisième à 2. Alors, en vertu des résultats de la question précédente, la somme des trois cubes est congrue à $1 + 1 + 8 = 10 = 1 + 9$ modulo 9. La somme des trois cubes est donc congrue à 1 modulo 9.
- Ou bien deux d'entre eux sont congrus à 2 et le troisième à 1. Alors, en vertu des résultats de la question précédente, la somme des trois cubes est congrue à $8 + 8 + 1 = 17 = 8 + 9$ modulo 9. La somme des trois cubes est donc congrue à 8 modulo 9.
- Ou bien les trois entiers sont tous trois congrus à 2. Alors, en vertu des résultats de la question précédente, la somme des trois cubes est congrue à $8 + 8 + 8 = 24 = 6 + 2 \times 9$ modulo 9. La somme des trois cubes est donc congrue à 6 modulo 9.

[1] Etant donné une implication « $A \Rightarrow B$ », l'implication contraposée est « $nonB \Rightarrow nonA$ ».

Démontrer l'une des deux implications, directe ou contraposée, revient à démontrer l'autre.

En effet, si « $A \Rightarrow B$ » est vraie, on ne peut pas avoir à la fois $nonB$ et *A* (car si on a *A*, on a *B*) et si « $nonB \Rightarrow nonA$ » est vraie, on ne peut pas avoir à la fois *A* et non *B* (car si on a *nonB*, on a *nonA*).

Il est parfois plus facile de démontrer l'implication contraposée, et nous en avons un exemple ici. Dans notre contexte :

A est la proposition : « *x, y, z* sont trois entiers dont la somme des cubes $x^3 + y^3 + z^3$ est un multiple de 9 »

B est la proposition : « au moins l'un des trois entiers *x, y, z* est un multiple de 3 »

Les négations de ces propositions sont :

nonA : « *x, y, z* sont trois entiers dont la somme des cubes $x^3 + y^3 + z^3$ n'est pas un multiple de 9 »

nonB : « aucun des trois entiers *x, y, z* n'est un multiple de 3 »

La somme des trois cubes est donc congrue à 1 ou 3 ou 6 ou 8 modulo 9.

Dans aucun des cas de figure la somme des trois cubes n'est congrue à 0 modulo 9. Elle n'est donc jamais multiple de 9.

Nous avons démontré l'implication contraposée de celle que nous voulons établir :

Soit x, y, z trois entiers relatifs. Si aucun des trois entiers x, y, z n'est un multiple de 3, alors la somme de leurs cubes n'est pas un multiple de 9.

L'implication que nous voulons établir est donc démontrée par la même occasion :

Soit x, y, z trois entiers relatifs. Si la somme des trois cubes est multiple de 9, alors au moins un des trois entiers x ou y ou z est multiple de 3.