Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

06

Correction

Sur le même sujet, voir l'exercice « La congruence numéro 23 ».

NB. Rappelons une propriété de la relation de congruence modulo *n* que nous aurons l'occasion de mettre en œuvre (voir exercice 01) :

Si $a \equiv b \ [n]$, alors pour tout entier relatif *c* : $c \times a \equiv c \times b \ [n]$.

En particulier, dans le présent contexte, si $a \equiv b \ [9]$, alors $4a \equiv 4b \ [9]$.

1. Déterminons les restes possibles de la division euclidienne de 4*x* par 9 :

Pour cela, nous allons utiliser un raisonnement par disjonction des cas, en discutant suivant la valeur du reste de la division euclidienne de l'entier relatif *x* par 9.

Soit *r* ce reste. Nous avons $x \equiv r \ [9]$ et d'après la propriété que nous avons rappelée, nous en déduisons que $4x \equiv 4r \ [9]$.

- Si $0 \leq 4r < 9$, le reste cherché est $4r$ lui-même.
- Sinon, nous écrirons la division euclidienne de 4*r* par 9, le nombre 4*r* est congru modulo 9 au reste *r'* de cette division. Nous aurons $4x \equiv r' \ [9]$ avec $0 \leq r' < 9$, le reste cherché sera *r'*.

L'entier *r* pouvant prendre les valeurs 0, 1, ... , 8, il y a 9 cas de figure à considérer.

- Si $r = 0$ (*x* de la forme $x = 9k, \ k \in \mathbb{Z}$), alors $4r = 0$ et $4x \equiv 0 \ [9]$, le reste est égal à 0.
- Si $r = 1$ (*x* de la forme $x = 9k + 1$), alors $4r = 4$ et $4x \equiv 4 \ [9]$, le reste est égal à 4.
- Si $r = 2$ (*x* de la forme $x = 9k + 2$), alors $4r = 8$ et $4x \equiv 8 \ [9]$, le reste est égal à 8.
- Si $r = 3$ (*x* de la forme $x = 9k + 3$), alors $4r = 12 = 1 \times 9 + 3$ donc $4x \equiv 3 \ [9]$,
  le reste est égal à 3.
- Si $r = 4$ (*x* de la forme $x = 9k + 4$), alors $4r = 16 = 1 \times 9 + 7$ donc $4x \equiv 7 \ [9]$,
  le reste est égal à 7.

- Si $r = 5$ (x de la forme $x = 9k + 5$), alors $4r = 20 = 2 \times 9 + 2$ donc $4x \equiv 2\ [9]$,

  le reste est égal à 2.

- Si $r = 6$ (x de la forme $x = 9k + 6$), alors $4r = 24 = 2 \times 9 + 6$ donc $4x \equiv 6\ [9]$,

  le reste est égal à 6.

- Si $r = 7$ (x de la forme $x = 9k + 7$), alors $4r = 28 = 3 \times 9 + 1$ donc $4x \equiv 1\ [9]$,

  le reste est égal à 1.

- Si $r = 8$ (x de la forme $x = 9k + 8$), alors $4r = 32 = 3 \times 9 + 5$ donc $4x \equiv 5\ [9]$,

  le reste est égal à 5.

NB. Les résultats peuvent être présentés commodément dans un « tableau de congruence » (laissé aux bons soins du lecteur) indiquant, pour tout entier x congru à un élément de l'ensemble $\{0, 1, \dots, 8\}$, à quel entier du même ensemble est congru l'entier $4x$.

Variante Python :

Nous avons répété 9 fois la même action. Cette répétition peut être légitimement automatisée à l'aide d'un algorithme Python qui résout la question.

Nous utilisons, à l'intérieur d'une boucle « for », l'instruction « % » qui renvoie le reste de la division euclidienne d'un entier par un autre. Ainsi, (4*r)%8 renvoie le reste de la division euclidienne de n^2 par 8.

:

```
>>> def congru06():
        for r in range(0,9):
            u=(4*r)%9
            print("si x est congru à", r,"modulo 9, 4x est congru à",u,"modulo 9")


>>> congru06()
si x est congru à 0 modulo 9, 4x est congru à 0 modulo 9
si x est congru à 1 modulo 9, 4x est congru à 4 modulo 9
si x est congru à 2 modulo 9, 4x est congru à 8 modulo 9
si x est congru à 3 modulo 9, 4x est congru à 3 modulo 9
si x est congru à 4 modulo 9, 4x est congru à 7 modulo 9
si x est congru à 5 modulo 9, 4x est congru à 2 modulo 9
si x est congru à 6 modulo 9, 4x est congru à 6 modulo 9
si x est congru à 7 modulo 9, 4x est congru à 1 modulo 9
si x est congru à 8 modulo 9, 4x est congru à 5 modulo 9
```

2. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ la congruence $4x \equiv 5\ [9]$:

La discussion de la question précédente nous a amenés à considérer une partition de l'ensemble $\mathbb{Z}$ en neuf classes disjointes et à déterminer, pour un entier x appartenant à chacune d'entre elles, quel était le reste de la division euclidienne de $4x$ par 9.

La congruence $4x \equiv 5\ [9]$ est vérifiée si et seulement si le reste de la division euclidienne de $4x$ par 9 est égal à 5.

Par simple lecture des résultats de la discussion de la question 1, ce reste est égal à 5 pour une et une seule des neuf classes de la partition, la classe correspondant au cas $r = 8$, c'est-à-dire « x congru à 8 modulo 9 » dans notre solution Python.

Concluons :

L'ensemble des entiers x tels que $4x \equiv 5\ [9]$ est l'ensemble des entiers relatifs x de la forme :

$$x = 9k + 8,\ k \in \mathbb{Z}$$

NB. Nous pouvons aussi bien conclure ainsi : $4x \equiv 5\ [9] \iff x \equiv 8\ [9]$.