Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

05

Correction

NB. Rappelons une propriété de la relation de congruence modulo *n*, conséquence de sa compatibilité avec la multiplication (voir exercices 01 et 02) :

Si $a \equiv b \ [n]$, alors $a^2 \equiv b^2 \ [n]$
(Si deux entiers sont congrus modulo *n*, leurs carrés le sont aussi).

1. Montrons que pour tout entier naturel *n*, son carré est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8 :

NB. Cette question est l'occasion pour nous de présenter (sans prétention d'exhaustivité) plusieurs méthodes de résolution, toutes également légitimes.

Méthode 1. Raisonnement par disjonction des cas, en discutant suivant la valeur du reste de la division euclidienne de *n* par 8 :

Soit *r* ce reste. Nous avons $n \equiv r \ [8]$ et d'après la propriété que nous avons rappelée, nous en déduisons que $n^2 \equiv r^2 \ [8]$.
Le cas échéant, nous écrivons la division euclidienne de r^2 par 8, le nombre r^2 est congru modulo 8 au reste de cette division.

Nous utilisons ainsi les divisions euclidiennes suivantes :
$9 = 1 \times 8 + \mathbf{1}$; $16 = 2 \times 8 + \mathbf{0}$; $25 = 3 \times 8 + \mathbf{1}$; $36 = 4 \times 8 + \mathbf{4}$; $49 = 6 \times 8 + \mathbf{1}$.

Les résultats sont présentés dans un tableau. Suivant les valeurs possibles du reste *r* (les nombres entiers 0, 1, 2, ..., 7), la troisième ligne du tableau donne l'entier compris entre 0 et 7 auquel est congru l'entier n^2.

Valeur de r	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de r^2	0	1	4	9	16	25	36	49
$n^2 \equiv \cdots \ [8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

Bilan :

- Si $n \equiv 0$ ou $4 \ [8]$ alors $n^2 \equiv 0 \ [8]$
- Si $n \equiv 1$ ou 3 ou 5 ou $7 \ [8]$ alors $n^2 \equiv 1 \ [8]$
- Si $n \equiv 2$ ou $6 \ [8]$ alors $n^2 \equiv 4 \ [8]$

Quel que soit le cas de figure, n^2 est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8.

Méthode 2. Automatisation de la méthode 1 à l'aide d'un algorithme Python :

Dans la méthode 1, nous avons répété huit fois la même action. Cette répétition peut être prise en charge dans un algorithme par une boucle « for ». Nous utilisons l'instruction « % » qui renvoie le reste de la division euclidienne d'un entier par un autre. Ainsi, (n*n)%8 renvoie le reste de la division euclidienne de n^2 par 8.

```
>>> def congru03():
        for n in range(0,8):
                u=(n*n)%8
                print("si n congru à ",n,"modulo 8 alors n^2 congru à ",u, "modulo 8")

>>> congru03()
si n congru à  0 modulo 8 alors n^2 congru à  0 modulo 8
si n congru à  1 modulo 8 alors n^2 congru à  1 modulo 8
si n congru à  2 modulo 8 alors n^2 congru à  4 modulo 8
si n congru à  3 modulo 8 alors n^2 congru à  1 modulo 8
si n congru à  4 modulo 8 alors n^2 congru à  0 modulo 8
si n congru à  5 modulo 8 alors n^2 congru à  1 modulo 8
si n congru à  6 modulo 8 alors n^2 congru à  4 modulo 8
si n congru à  7 modulo 8 alors n^2 congru à  1 modulo 8
```

Le bilan est le même.

Quel que soit le cas de figure, le nombre n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.

Méthode 3. Raisonnement par disjonction des cas, en discutant suivant la valeur du reste de la division euclidienne de *n* par 4 :

Les deux méthodes précédentes nous amènent à conjecturer qu'une congruence modulo 4 portant sur l'entier *n* en implique une autre modulo 8 sur son carré.

Un entier quelconque *n* peut être congru soit à 0, soit à 1, soit à 2, soit à 3 modulo 4.

- **Premier cas : $\boldsymbol{n \equiv 0\ [4]}$.** Il existe un entier relatif k tel que $n = 4k$. Alors $n^2 = 16k^2 = 8 \times (2k^2)$, et nous en déduisons $n^2 \equiv 0\ [8]$.
- **Deuxième cas : $\boldsymbol{n \equiv 1\ [4]}$.** Il existe un entier relatif *k* tel que $n = 1 + 4k$. Alors $n^2 = 1 + 8k + 16k^2 = 1 + 8 \times (k + 2k^2)$, et nous en déduisons $n^2 \equiv 1\ [8]$.
- **Troisième cas : $\boldsymbol{n \equiv 2\ [4]}$.** Il existe un entier relatif *k* tel que $n = 2 + 4k$. Alors $n^2 = 4 + 16k + 16k^2 = 4 + 8 \times (2k + 2k^2)$, et nous en déduisons $n^2 \equiv 4\ [8]$.
- **Quatrième cas : $\boldsymbol{n \equiv 3\ [4]}$.** Il existe un entier relatif *k* tel que $n = 3 + 4k$. Alors $n^2 = 9 + 24k + 16k^2 = 1 + 8 \times (1 + 3k + 2k^2)$, et nous en déduisons $n^2 \equiv 1\ [8]$.

Quel que soit le cas de figure, le nombre n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.

Remarquons en vue de la question suivante que $n^2 \equiv 1\ [8]$ si et seulement si *n* est un nombre impair. En effet, la congruence $n^2 \equiv 1\ [8]$ est obtenue lorsque *n* est congru à 1, 3, 5 ou 7 modulo 8 (méthodes 1 et 2) ou aussi bien lorsque *n* est congru à 1 ou 3 modulo 4 (méthode 3). Les cas de figure concernés sont exactement les cas où *n* est un nombre impair.

2. Cherchons quels sont les entiers relatifs *n* tels que $\boldsymbol{(n+3)^2 - 1 \equiv 0\ [8]}$:

Cette congruence est équivalente à la congruence $(n+3)^2 \equiv 1\ [8]$.
D'après la remarque faite en fin de question précédente, cette congruence est vérifiée si et seulement si $(n+3)$ est un nombre impair.
Or, puisque 3 est un nombre impair, l'entier $(n+3)$ a la parité opposée à celle de l'entier *n*.
L'entier $(n+3)$ est un nombre impair si et seulement si *n* est un nombre pair.

La congruence $(n+3)^2 - 1 \equiv 0\ [8]$ est vérifiée si et seulement si *n* est un nombre pair.