Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

04

Correction

NB. Rappelons une propriété des congruences, en particulier de la relation de congruence modulo 17, leur compatibilité avec l'élévation à une puissance (voir exercice 02) :

Si $a \equiv b \ [17]$, alors $a^p \equiv b^p \ [17]$ pour tout entier naturel p.

1. Vérifions que $\mathbf{2^4 \equiv -1 \ [17]}$ et que $\mathbf{6^2 \equiv 2 \ [17]}$:

Nous savons que deux nombres entiers sont congrus modulo 17 si et seulement si leur différence est un multiple de 17.

Etudions les différences $\mathbf{2^4 - (-1)}$ et $\mathbf{6^2 - 2}$:

$2^4 - (-1) = 16 + 1 = 17$ et $6^2 - 2 = 36 - 2 = 34 = 2 \times 17$

Chacune des deux différences $2^4 - (-1)$ et $6^2 - 2$ est un multiple de 17.

Concluons :

- Puisque $2^4 - (-1)$ est un multiple de 17, la congruence $2^4 \equiv -1 \ [17]$ est vérifiée.
- Puisque $6^2 - 2$ est un multiple de 17, la congruence $6^2 \equiv 2 \ [17]$ est vérifiée.

2. Déduisons-en les restes des divisions par 17 des nombres $\mathbf{1532^{20}}$ et $\mathbf{346^{12}}$:

Il nous faut établir un lien entre 1532, 346 et les nombres étudiés à la question 1.

Cherchons quel est le reste de la division euclidienne de 1532 par 17 :

Nous constatons que $90 \times 17 = 1530$ est le plus grand multiple de 17 inférieur ou égal à 1532.

$\frac{1532}{17}$	90.1176
90· 17	1530
1532=90· 17+2	true

La division euclidienne de 1532 par 17 s'écrit : $1532 = 90 \times 17 + 2$

Le reste de la division euclidienne de 1532 par 17 est égal à 2, par conséquent $1532 \equiv 2\ \ [17]$

Exploitons cette congruence pour obtenir le reste de la division euclidienne de 1532^{20} par 17 :

Compte tenu de la propriété de compatibilité de la relation de congruence modulo 17 avec l'élévation à une puissance, $1532 \equiv 2\ \ [17] \ \Rightarrow\ 1532^{20} \equiv 2^{20}\ \ [17]$.

Or, $2^{20} = 2^{4\times 5} = (2^4)^5$.

La question 1 a montré que $2^4 \equiv -1\ \ [17]$, donc $2^{20} = (2^4)^5 \equiv (-1)^5\ \ [17]$

Vu que $(-1)^5 = -1$, nous obtenons : $2^{20} \equiv -1\ \ [17]$.

Il en résulte la congruence : $1532^{20} \equiv -1\ \ [17]$

L'entier *r* est le reste de la division euclidienne d'un entier *a* par 17 si et seulement si $\begin{cases} a \equiv r\ \ [17] \\ 0 \le r < 17 \end{cases}$.

En l'occurrence, l'unique entier *r* vérifiant : $\begin{cases} r \equiv -1\ \ [17] \\ 0 \le r < 17 \end{cases}$ est l'entier 16.

Le reste de la division euclidienne de 1532^{20} par 17 est l'entier 16.

Suivons une démarche semblable à propos de 346^{12} :

Nous remarquons, sans nécessairement faire appel à une calculatrice, que :

$$346 = 340 + 6 = 20 \times 17 + 6$$

Puisque $0 \leq 6 < 17$, il s'agit là de la division euclidienne de 346 par 17.

Le reste de la division euclidienne de 346 par 17 est égal à 6, par conséquent $346 \equiv 6 \ [17]$

Compte tenu de la propriété de compatibilité de la relation de congruence modulo 17 avec l'élévation à une puissance, $346 \equiv 6 \ [17] \ \Rightarrow \ 346^{12} \equiv 6^{12} \ [17]$.

Or, $6^{12} = 6^{2\times6} = (6^2)^6$.

La question 1 a montré que $6^2 \equiv 2 \ [17]$, donc $6^{12} = (6^2)^6 \equiv 2^6 \ [17]$

Il en résulte : $346^{12} \equiv 2^6 \ [17]$

La question 1 a montré également que $2^4 \equiv -1 \ [17]$. Or : $2^6 = 2^4 \times 2^2 = 2^4 \times 4$.

Appliquons la propriété « si $a \equiv b \ [n]$, alors $a \times c \equiv b \times c \ [n]$ » avec $n = 17, a = 2^4$, $b = -1$ et $c = 2^2 = 4$: $\quad 2^4 \equiv -1 \ [17] \ \Rightarrow \ 2^6 = 2^4 \times 4 \equiv (-1) \times 4 \ [17]$

Des deux congruences : $\begin{cases} 346^{12} \equiv 2^6 \ [17] \\ 2^6 \equiv -4 \ [17] \end{cases}$, nous en déduisons la congruence : $346^{12} \equiv -4 \ [17]$

L'unique entier r vérifiant : $\begin{cases} r \equiv -4 \ [17] \\ 0 \leq r < 17 \end{cases}$ est l'entier 13.

Le reste de la division euclidienne de 346^{12} par 17 est l'entier 13.

NB. Nous pouvions conclure dès la congruence $346^{12} \equiv 2^6 \ [17]$ établie.

Les deux entiers 346^{12} et 2^6 étant congrus modulo 13, les restes de leurs divisions euclidiennes par 17 sont égaux. Or $2^6 = 64 = 3 \times 17 + 13$. Le reste de la division euclidienne de 64 par 17 étant 13, il en est de même du reste de la division euclidienne de 346^{12} par 17.