Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

03

Correction

NB. Rappelons une propriété des congruences, en particulier des relations de congruence modulo 13 et modulo 11, leur compatibilité avec l'élévation à une puissance (voir exercice 02) :

Si $a \equiv b \ [13]$, alors $a^p \equiv b^p \ [13]$ pour tout entier naturel *p*.
Si $a \equiv b \ [11]$, alors $a^p \equiv b^p \ [11]$ pour tout entier naturel *p*.

1. Montrons que pour tout entier naturel *n*, le nombre $5^{4n} - 1$ **est divisible par 13 :**

Nous savons qu'un entier *a* est divisible par 13 si et seulement si $a \equiv 0 \ [13]$, ce qui nous amène à utiliser dans cette question une congruence modulo 13 et à nous intéresser particulièrement au comportement, suivant les valeurs de *n*, du nombre $5^{4n} = (5^4)^n$ dans une telle congruence.

Cherchons d'abord à quel entier le nombre 5^4 est congru modulo 13 :

Nous avons : $5^2 = 25 = -1 + 26 = -1 + 2 \times 13$. Donc : $5^2 \equiv -1 \ [13]$.

Or, si deux nombres sont congrus modulo 13, leurs carrés sont congrus modulo 13.

$5^2 \equiv -1 \ [13] \ \Rightarrow \ (5^2)^2 \equiv (-1)^2 \ [13]$, c'est-à-dire :

$$5^4 \equiv 1 \ [13]$$

Elevons à la puissance *n* pour *n* entier naturel :

$5^4 \equiv 1 \ [13] \ \Rightarrow \ (5^4)^n \equiv (1)^n \ [13]$ pour tout entier naturel *n*, c'est-à-dire que :

$5^{4n} \equiv 1 \ [13]$ pour tout entier naturel *n*.

Par conséquent : $5^{4n} - 1 \equiv 0 \ [13]$ pour tout entier naturel *n*.

Concluons :

Puisque $5^{4n} - 1 \equiv 0 \ [13]$ pour tout entier naturel *n*,

le nombre $5^{4n} - 1$ est divisible par 13 pour tout entier naturel *n*.

2. Montrons que pour tout entier naturel *n*, le nombre $5^{2n} - 14^n$ **est divisible par 11 :**

Remarquons que $5^{2n} = (5^2)^n = 25^n$. Nous sommes amenés à utiliser dans cette question une congruence modulo 11 et à nous intéresser particulièrement au comportement des puissances de 25 et de 14 dans une telle congruence.

Nous avons $5^2 - 14 = 25 - 14 = 11$ donc : $5^2 \equiv 14 \ [11]$

Appliquons la compatibilité de cette congruence avec l'élévation à une puissance :

$5^2 \equiv 14 \ [11] \quad \Rightarrow \quad (5^2)^n \equiv 14^n \ [11]$ pour tout entier naturel *n*.

Or, dire que $(5^2)^n \equiv 14^n \ [11]$ pour tout entier naturel *n* revient à dire que $5^{2n} - 14^n \equiv 0 \ [11]$ pour tout entier naturel *n*.

Concluons :

Puisque $5^{2n} - 14^n \equiv 0 \ [11]$ pour tout entier naturel *n*,

le nombre $5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11 pour tout entier naturel *n*.