Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

27

Correction

- **Etablissons un lien entre les congruences modulo 8 et l'équation (E) :**

Dans cet exercice, il s'agit d'abord d'établir un rapport entre les « congruences modulo 8 » et la résolution de l'équation (E) : $17x^2 - 31y^2 = 22$.

Un couple (*x, y*) est solution de (E) si et seulement si : $17x^2 - 31y^2 - 22 = 0$.

Utilisons une congruence modulo 8. Si l'égalité $17x^2 - 31y^2 = 22$ est vérifiée, alors, à plus forte raison, la congruence $17x^2 - 31y^2 \equiv 22 \ [8]$ est aussi vérifiée

Or, $17 = 2 \times 8 + 1 \equiv 1 \ [8]$; $31 = 4 \times 8 - 1 \equiv -1 \ [8]$[1] ; $22 = 2 \times 8 + 6 \equiv 6 \ [8]$

Nous pouvons remplacer dans la congruence $17x^2 - 31y^2 \equiv 22 \ [8]$ les coefficients 17, 31 et 22 par respectivement $1, -1, 6$ et obtenir ainsi la congruence : $x^2 + y^2 \equiv 6 \ [8]$.
Nous avons ainsi démontré l'implication suivante :
Quels que soient les entiers relatifs *x* et *y* : $17x^2 - 31y^2 = 22 \implies x^2 + y^2 \equiv 6 \ [8]$

Une condition nécessaire pour que (*x, y*) soit susceptible d'être solution de (E) est que :

$$x^2 + y^2 \equiv 6$$

[1] La division euclidienne de 31 par 8 est : $31 = 3 \times 8 + 7$; mais la relation que nous utilisons (qui n'est pas la division euclidienne) nous semble meilleure dans le présent contexte, le coefficient « -1 » étant plus performant que 7. Nous avons d'ailleurs la congruence $7 \equiv -1 \ [8]$, qui justifie l'interchangeabilité des deux coefficients 7 et -1.

- **Etudions les valeurs possibles, modulo 8, d'une somme de deux carrés :**

La question qui se pose est : une somme de deux carrés peut-elle être congrue à 6 modulo 8 ? Nous allons tenter de répondre à cette question …

Soit *x* un entier relatif et *r* le reste de sa division euclidienne par 8

Nous disposons la congruence $x \equiv 8\ \ [7]$ qui implique la congruence $x^2 \equiv r^2\ \ [8]$. Le reste *r* pouvant prendre les valeurs entières de 0 à 7, nous calculons pour chacune de ces valeurs le nombre r^2 et le reste de sa division par 8.

Si $x \equiv \cdots\ \ [8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r^2 =$	0	1	4	9	16	25	36	49
$x^2 \equiv \cdots [8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

Le carré d'un nombre entier est donc congru à 0, 1 ou 4 modulo 8.

La somme de deux carrés peut être congrue à 0+0, ou 0+1, ou 0+4, ou 1+1, ou 1+4, ou 4+4 modulo 8, c'est-à-dire en fin de compte à 0, 1, 2, 4 ou 5 (modulo 8).

- **Concluons :**

La valeur 6 ne figure pas parmi les valeurs possibles, modulo 8, d'une somme de deux carrés. La condition nécessaire $x^2 + y^2 \equiv 6\ \ [8]$ d'existence de solution ne peut jamais être satisfaite, dans aucun cas de figure.

Par conséquent, l'équation (E) n'a pas de solution.