Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

26

Correction

Un répunit est un entier naturel qui s'écrit en numération décimale uniquement avec le chiffre 1 (les entiers 1, 11, 111, 1111 sont des répunits).

1.a. Déterminons le chiffre des unités d'un entier *n* dont le carré admet 1 comme chiffre des unités :

Soit $N = 10a + b$ avec $0 \leq b \leq 9$ un entier dont b est le chiffre des unités.

Alors : $N^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$.

Le chiffre des unités de N^2 est le même que celui de b^2.

Or, parmi les carrés des entiers 0, 1, 2, …9, deux et deux seulement admettent 1 comme chiffre des unités, ce sont 1 et $81 = 9^2$

Le chiffre des unités de *n* peut être 1 ou 9.

1.b. Montrons qu'un entier qui se termine par 1 ou 9 a un carré congru à 1 modulo 20 :

Etudions chacun des deux cas.

- **Soit *n* un entier naturel dont le chiffre des unités est égal à 1.**

Il peut s'écrire : $n = 10D + 1$ où l'entier D représente son nombre de dizaines.

$$n^2 = (10D + 1)^2 = 100D^2 + 20D + 1 = 20 \times (5D^2 + D) + 1$$

Le nombre $5D^2 + D$ est un nombre entier.

Le nombre $n^2 - 1$ est égal à $20 \times (5D^2 + D)$, c'est un multiple de 20, donc $n^2 \equiv 1 \ [20]$.

- **Soit *n* un entier naturel dont le chiffre des unités est égal à 9.**

Il peut s'écrire : $n = 10D + 9$ où l'entier D représente son nombre de dizaines, mais on peut l'écrire aussi bien : $n = 10D + (10 - 1) = 10(D + 1) - 1$.

Notons D' l'entier $D' = D + 1$.

$$n^2 = (10D' - 1)^2 = 100D'^2 - 20D' + 1 = 20 \times (5D'^2 - D') + 1$$

Le nombre $5D'^2 - D'$ est un nombre entier.

Le nombre $n^2 - 1$ est égal à $20 \times (5D'^2 - D')$, c'est un multiple de 20, donc $n^2 \equiv 1 \ [20]$.

Or, la **question 1.a** a démontré que si le chiffre des unités du carré d'un entier *n* est égal à 1, le chiffre des unités de *n* était 1 ou 9. Nous avons $n^2 \equiv 1 \ [20]$ dans chacun des deux cas.

Si l'écriture décimale d'un carré se termine par le chiffre 1, alors ce carré est congru à 1 modulo 20.

Remarquons pour la question suivante que l'implication contraposée est la suivante : « si un entier n'est pas congru à 1 modulo 20, alors ce n'est pas un carré qui se termine par le chiffre 1 ».

2. Déterminons les répunits qui sont des carrés parfaits :

1 est un répunit puisque son écriture décimale ne comprend que le chiffre 1, et c'est un carré parfait.

Considérons un répunit *R* qui s'écrit avec au moins deux chiffres : $R = 10^p + \cdots + 10 + 1$ avec *p* au moins égal à 1.

Il peut s'écrire : $R = 100C + 10 + 1 = 100C + 11$ où l'entier naturel *C* représente le nombre de ses centaines. Mais 100 est un multiple de 20. Aussi bien : $R = 20 \times (5C) + 11$.

Le nombre $5C$ est un entier, $R - 11$ est égal à $20 \times (5C)$, ce nombre est un multiple de 20.

Nous obtenons la congruence : $R \equiv 11 \ [20]$.

Tout répunit s'écrivant avec au moins deux chiffres est congru à 11 modulo 20. Il se termine par le chiffre 1, mais il n'est pas congru à 1 modulo 20. Par conséquent ce n'est pas un carré.

L'unique répunit qui est un carré parfait est le répunit 1.