Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

25

Correction

1.a. Conjecturons avec la calculatrice :

La calculatrice (en l'occurrence TI-Nspire) affiche les cinq premiers termes (d'indices 0 à 4) de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit les termes 3, 5, 17, 257 et 65537 puis teste leur primalité.	Define $f(n)=2^{2^n}+1$ — *Terminé* seq$(f(n),n,0,4)$ — $\{3,5,17,257,65537\}$ seq(isPrime$(f(n))$,n,0,4) — {true,true,true,true,true} seq(isPrime$(f(n))$,n,0,5) — {true,true,true,true,true,false} $f(5)$ — 4294967297 factor$(f(5))$ — $641\cdot 6700417$

Citons deux conjectures possibles à propos des cinq premiers termes :

C1. Ces nombres sont tous des nombres premiers.

C2 À partir du terme de rang 2, le chiffre des unités de F_n est 7.

1.b. Des questions à propos de l'étrange sixième terme :

La calculatrice a ensuite calculé $F_6 = 4294967297$ et a testé sa primalité.

Ce terme n'est pas premier. Nous constatons que $4294967297 = 641 \times 6700417$

En revanche, le chiffre des unités est encore un 7.

La non primalité de ce terme infirme la conjecture de Fermat : il existe des nombres F_n non premiers.

Nous pouvons nous poser éventuellement deux questions :

Q1. Quels sont les nombres de Fermat qui sont premiers ?

Cette question ambitieuse nous dépasse, nous ne sommes pas en mesure d'y répondre, oublions-là.

Lire à ce propos l'excellent article Wikipedia sur les nombres de Fermat.

Q2. Est-ce que pour $n \geq 2$, le chiffre des unités de F_n est toujours un 7 ?

Voilà qui sera l'objet de la question suivante. C'est bien la « question à se poser » attendue …

2.a. Montrons la relation de récurrence $\boldsymbol{F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1}$:

Pour tout entier naturel *n* : $(F_n - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1$

Or, l'exposant du nombre $\left(2^{2^n}\right)^2$ est 2×2^n, cet exposant est égal à 2^{n+1}.

Nous obtenons : $\left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^{n+1}}$ donc : $(F_n - 1)^2 + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1$.

Nous obtenons bien la relation $(F_n - 1)^2 + 1 = F_{n+1}$

2.b. Montrons par récurrence que le chiffre des unités est un 7 à partir du rang 2 :

Remarquons que le chiffre des unités d'un nombre entier naturel est un 7 si et seulement si cet entier est congru à 7 modulo 10.

Appelons « propriété $\wp_n$ » la propriété « $F_n \equiv 7 \ [10]$ ».

Initialisation : Les calculs précédents ont montré que F_2, F_3, F_4 et F_5 sont tous congrus à 7 modulo 10.

$\wp_2$, $\wp_3$, $\wp_4$ et $\wp_5$ sont vérifiées.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel *n* la propriété $\wp_n$ soit vérifiée, c'est-à-dire que nous disposions de la congruence $F_n \equiv 7 \ [10]$.

Nous avons alors : $F_n - 1 \equiv 6 \ [10]$ puis $(F_n - 1)^2 \equiv 6^2 \ [10]$.

Or, $6^2 = 36 = 3 \times 10 + 6$ donc le carré de 6 vérifie la congruence : $6^2 \equiv 6 \ [10]$.

Ainsi, par transitivité $(F_n - 1)^2 \equiv 6 \, [10]$ et en fin de compte $(F_n - 1)^2 + 1 \equiv 7 \, [10]$, c'est-à-dire que nous obtenons $F_{n+1} \equiv 7 \, [10]$.

Quel que soit l'entier naturel *n*, $F_n \equiv 7 \, [10] \implies F_{n+1} \equiv 7 \, [10]$.

Nous avons démontré l'implication $\wp_n \Rightarrow \wp_{n+1}$, la « propriété $\wp_n$ » est héréditaire.

Concluons :

- La propriété $\wp_n$ est initialisée au rang 2.
- Elle est héréditaire.

Nous pouvons affirmer qu'elle est vérifiée pour tout entier $n \geq 2$.

Le chiffre des unités des nombres de Fermat d'indice $n \geq 2$ est toujours un 7.