Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

24

Correction

NB. La suite numérique étudiée dans cet exercice est telle que :

- Son terme initial u_0 est un nombre entier relatif.
- Les coefficients 5 et -6 étant des entiers, si u_n est un entier relatif, son successeur u_{n+1} est lui aussi un entier relatif en tant que combinaison entière d'entiers relatifs.

Il s'agit donc d'une suite de nombres entiers relatifs. Prenons-en note une fois pour toutes.

1. Calculons les premiers termes de la suite puis conjecturons :

En nous aidant d'un algorithme Python, nous avons calculé les premiers termes de la suite jusqu'au terme de rang 8 (pour faire bonne mesure).

```
>>> def congru24():
        u=14
        for n in range(0,8):
                u=5*u-6
                n=n+1
                print("le terme de rang",n,"est égal à",u)


>>> congru24()
le terme de rang 1 est égal à 64
le terme de rang 2 est égal à 314
le terme de rang 3 est égal à 1564
le terme de rang 4 est égal à 7814
le terme de rang 5 est égal à 39064
le terme de rang 6 est égal à 195314
le terme de rang 7 est égal à 976564
le terme de rang 8 est égal à 4882814
```

NB. Nous pouvons proposer au moins deux formulations (notées F1 et F2) d'une conjecture à propos des deux derniers chiffres de l'écriture de u_n, la deuxième étant un peu plus précise que la première. Compte tenu de la tournure de l'exercice, la conjecture la plus « attendue » semble être F1, mais nous aurons aussi les moyens de démontrer F2.

Nous pouvons conjecturer :

- F1 : « Les deux derniers chiffres de l'écriture de u_n sont ou bien 14 ou bien 64 »
- F2. Les deux derniers chiffres des termes de rang pair sont 14 et les deux derniers chiffres des termes de rang impair sont 64.

2.a. Montrons que $u_{n+2} \equiv u_n \ [4]$:

Utilisons deux fois la relation de récurrence :

Pour tout entier naturel *n* : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$.

La relation de récurrence qui permet de calculer un terme situé deux rangs après un terme donné est la relation $u_{n+2} = 25u_n - 36$.

Cette relation peut aussi bien s'écrire : $u_{n+2} = u_n + 24u_n - 36 = u_n + 4 \times (6u_n - 9)$.

Les deux nombres : u_{n+2} et u_n diffèrent d'un multiple de 4, ils sont congrus modulo 4.

Pour tout entier naturel *n*, $u_{n+2} \equiv u_n \quad [4]$

NB. Au même prix, nous aurions pu écrire : : $u_{n+2} = u_n + 12 \times (2u_n - 3)$ ce qui prouvait la congruence $u_{n+2} \equiv u_n \quad [12]$ plus forte que celle demandée. Si ces deux termes sont congrus modulo 12, *a fortiori* ils le sont modulo 4.

2.b. Déduisons-en deux congruences :

Compte tenu de la congruence précédente entre des termes à deux rangs d'écart, par deux récurrences évidentes, nous concluons que tous les termes de rang *n* pair (de la forme $n = 2k$) sont congrus modulo 4 au terme de rang 0 et tous les termes de rang impair (de la forme $n = 2k + 1$) sont congrus modulo 4 au terme de rang 1.

Or : $u_0 = 14 = 3 \times 4 + 2 \equiv 2 \quad [4]$ et $u_1 = 64 = 16 \times 4 \equiv 0 \quad [4]$.

Pour tout entier naturel *k*, $u_{2k} \equiv 2 \quad [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \quad [4]$

2.c. Montrons que pour tout entier naturel *n*, $2u_n = 5^{n+2} + 3$:

Appelons « propriété $\wp_n$ » la propriété associée à l'entier *n* : « $2u_n = 5^{n+2} + 3$ ».

Initialisation :

Au rang zéro : d'une part, $2u_0 = 2 \times 14 = 28$ et d'autre part, $5^{0+2} + 3 = 25 + 3 = 28$.

L'égalité $2u_0 = 5^{0+2} + 3$ est bien vérifiée, la propriété $\wp_0$ est vraie.

Hérédité :

Compte tenu de la relation de récurrence déterminant un terme de la suite en fonction de son précédent : $2u_{n+1} = 2 \times (5u_n - 6) = 10u_n - 12$

Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, la propriété $\wp_n$ soit vraie, c'est-à-dire supposons que $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Cela revient à supposer que $u_n = \frac{5^{n+2}+3}{2}$

Nous obtenons : $2u_{n+1} = 10 \times \left(\frac{5^{n+2}+3}{2}\right) - 12 = (5 \times 5^{n+2} + 15) - 12.$

Ce qui nous donne : $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3 = 5^{(n+1)+2} + 3$. Nous retrouvons bien la propriété en jeu au rang $(n + 1)$.

Si la propriété $\wp_n$ est vraie, alors la propriété $\wp_{n+1}$ est vraie elle aussi.

Nous avons démontré l'implication $\wp_n \;\Rightarrow\; \wp_{n+1}$, la « propriété $\wp_n$ » est héréditaire.

Conclusion :

Puisque la propriété $\wp_n$ est vraie lorsque $n = 0$ et qu'elle est héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, $2u_n = 5^{n+2} + 3.$

2.d. Montrons que pour tout entier naturel *n*, $\mathbf{5^{n+2} \equiv 25 \;\; [100]}$:

Observons que pour tout entier naturel *n* : $5^{n+2} = 5^2 \times 5^n = 25 \times 5^n$

Appelons « propriété $\wp_n$ » la propriété associée à l'entier *n* : « $5^{n+2} \equiv 25 \;\; [100]$ », que nous voulons démontrer.

Initialisation :

Au rang zéro : $5^{0+2} = 25 \equiv 25 \;\; [100]$, la propriété $\wp_0$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, la propriété $\wp_n$ soit vraie, c'est-à-dire supposons que $5^{n+2} \equiv 25 \;\; [100]$.

Alors : $5^{(n+1)+2} = 5^{n+3} = 5 \times 5^{n+2} \equiv 5 \times 25 \;\; [100]$

Or : $5 \times 25 = 125 \equiv 25 \;\; [100]$.

Par transitivité, nous obtenons la congruence $5^{(n+1)+2} \equiv 25 \;\; [100]$.

Si la propriété $\wp_n$ est vraie, alors la propriété $\wp_{n+1}$ est vraie elle aussi.

Nous avons démontré l'implication $\wp_n \;\Rightarrow\; \wp_{n+1}$, la « propriété $\wp_n$ » est héréditaire.

Conclusion :

Puisque la propriété $\wp_n$ est vraie lorsque $n = 0$ et qu'elle est héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, $5^{n+2} \equiv 25 \;\; [100]$.

2.e. Déduisons-en que $2u_n \equiv 28\ [100]$:

$\begin{cases} 2u_n = 5^{n+2} + 3 \\ 5^{n+2} \equiv 25\ [100] \\ 25 + 3 = 28 \end{cases} \Rightarrow 2u_n \equiv 28\ [100]$. (Compatibilité des congruences avec l'addition).

3. Déterminons les deux derniers chiffres de l'écriture de u_n :

Résolvons l'équation congruente $2x \equiv 28\ [100]$, dont u_n est solution d'après le résultat de la question 2.e.

En revenant à la définition d'une congruence, $2x \equiv 28\ [100]$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que : $2x = 28 + 100k$, c'est-à-dire tel que $x = 14 + 50k$.

$$2x \equiv 28\ [100] \iff x \equiv 14\ [50]$$

Ramenons-nous à des congruences modulo 100.

Suivant que k est un nombre pair ($k = 2m$) ou un nombre impair ($k = 2m + 1$) l'entier x s'exprime ainsi : $x = 14 + 100m$ ou bien ainsi : $x = 14 + 50 \times (2m + 1) = 64 + 100m$ avec m entier relatif.

Nous pouvons conclure : $2x \equiv 28\ [100] \iff \begin{cases} x \equiv 14\ [100] \\ \text{ou bien} \\ x \equiv 64\ [100] \end{cases}$

En tant que solution de l'équation congruente $2x \equiv 28\ [100]$, l u_n vérifie, pour tout entier naturel n,

$\begin{cases} u_n \equiv 14\ [100] \\ \text{ou bien} \\ u_n \equiv 64\ [100] \end{cases}$. Les deux derniers chiffres de u_n sont ou bien 14 ou bien 64.

La conjecture F1 est démontrée.

Le résultat de la question 2.b nous permet de préciser davantage. Selon ces résultats, les termes de rang impair sont congrus à 0 modulo 4, ce qui est le cas de 64 mais non de 14, et les termes de rang pair sont congrus à 2 modulo 4, ce qui est le cas de 14 mais non de 64.

Nous pouvons conclure :

Les deux derniers chiffres des termes de rang pair sont 14 et les deux derniers chiffres des termes de rang impair sont 64.

La conjecture F2 est démontrée.