Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

23

Correction

Cet exercice porte sur la résolution d'équations congruentes de la forme $ax \equiv b \ [n]$ ou *a* et *n* sont des entiers relatifs non nuls et *b* est un entier relatif quelconque.

Nous rappelons la compatibilité de la relation de congruence modulo *n* avec la multiplication :
Si $a \equiv b \ [n]$, alors pour tout entier relatif *c* : $c \times a \equiv c \times b \ [n]$.

1. Complétons la « table des restes » :

Pour tout entier relatif *x*, soit *r* le reste de sa division euclidienne par 9, nombre auquel *x* est congru modulo 9. Ce reste *r* peut prendre les valeurs 0, 1, 2, …, 8, valeurs que nous retrouvons dans la table et qui déterminent une partition de l'ensemble ℕ en neuf classes disjointes.

Vu la compatibilité de la congruence modulo 9 avec la multiplication, nous avons : $4x \equiv 4r \ [9]$.
Nous calculons le nombre $4r$ puis, le cas échéant, le reste de la division euclidienne de ce nombre par 9, reste auquel $4x$ est congru modulo 9.
Nous sommes ainsi amenés à utiliser, successivement, les divisions euclidiennes suivantes :
$12 = 1 \times 9 + 3$; $16 = 1 \times 9 + 7$; $20 = 2 \times 9 + 2$; $24 = 2 \times 9 + 6$;
$28 = 3 \times 9 + 1$ et $32 = 3 \times 9 + 5$.

Si $x \equiv \cdots \ [9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4r =$	0	4	8	12	16	20	24	28	32
$4x \equiv \cdots \ [9]$	0	4	8	3	7	2	6	1	5

2. Résolvons à l'aide de la table l'équation $4x \equiv 5 \ [9]$:

Par simple lecture de la table, nous repérons, s'il y en a, les colonnes où l'élément de la troisième ligne (celle de $4x \equiv \cdots \ [9]$) est égal à 5.

Une colonne et une seule est concernée, la colonne « 8 » (surlignée en jaune).

La lecture de la table détermine ainsi que :

$$4x \equiv 5 \ [9] \text{ si et seulement si } x \equiv 8 \ [9]$$

Revenons à la définition d'une congruence modulo 9 : $x \equiv 8 \ [9]$ si et seulement si il existe un entier relatif *k* tel que $x = 8 + 9k$.

L'ensemble des entiers relatifs *x* solutions de $4x \equiv 5 \ [9]$ est l'ensemble $E = \{ 9k + 8, \ k \in \mathbb{Z} \}$.

NB. Remarquons le rôle de « l'existence et l'unicité » de la colonne concernée :

Existence : Les résultats qui sont affichés dans la colonne « $r = 8$» indiquent que $4 \times 8 \equiv 5 \ [9]$ et qu'en conséquence : $x \equiv 8 \ [9] \implies 4x \equiv 5 \ [9]$.

Unicité : L'unicité d'une telle colonne indique que 8 est le seul reste ayant la propriété voulue et qu'en conséquence : $4x \equiv 5 \ [9] \Rightarrow x \equiv 8 \ [9]$

L'équivalence obtenue entre les deux congruences $4x \equiv 5 \ [9]$ et si $x \equiv 8 \ [9]$ est liée à l'existence et l'unicité de la colonne dans laquelle nous lisons le résultat « 5 ».

3. Résolvons (presque) sans l'aide de la table l'équation $7x \equiv 8 \ [9]$:

« Presque » sans l'aide de la table car, dans notre contexte, c'est quand même la table qui nous permet de « remarquer » que $4 \times 7 \equiv 1 \ [9]$. Deux entiers relatifs *a* et *b* dont le produit est congru à 1 modulo *n*, comme c'est le cas de 4 et 7 modulo 9, sont dits « inverses modulo *n* » l'un de l'autre.

Soit *x* un entier relatif solution de l'équation congruente $7x \equiv 8 \ [9]$.

Multiplions les deux membres de cette congruence par un inverse modulo 9 de 7, à savoir l'entier 4 que nous avons « remarqué ». Nous savons que nous obtenons ainsi une nouvelle congruence modulo 9 :

$$7x \equiv 8 \ [9] \implies 4 \times (7x) \equiv 4 \times 8 \ [9]$$

Mais $4 \times (7x) = (4 \times 7)x \equiv x \ [9]$ et $4 \times 8 = 32 = 3 \times 9 + 5$ donc $4 \times 8 \equiv 5 \ [9]$; la congruence $4 \times (7x) \equiv 4 \times 8 \ [9]$ est équivalente à la congruence $x \equiv 5 \ [9]$.

Nous obtenons l'implication : $7x \equiv 8 \ [9] \implies x \equiv 5 \ [9]$.

Réciproquement, si $x \equiv 5 \ [9]$, alors nous obtenons une nouvelle congruence modulo 9 en multipliant par 7 chaque membre de cette congruence : $7x \equiv 7 \times 5 \ [9]$.

Or : $5 \times 7 = 35 = 3 \times 9 + 8$ donc $5 \times 7 \equiv 8 \ [9]$

Nous obtenons l'implication : $x \equiv 5 \ [9] \implies 7x \equiv 8 \ [9]$.

En tenant compte des deux sens de démonstration :

$$7x \equiv 8 \ [9] \iff x \equiv 5 \ [9].$$

Revenons à la définition d'une congruence modulo 9 : $x \equiv 5 \ [9]$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $x = 8 + 9k$.

L'ensemble des entiers relatifs x solutions de $7x \equiv 8 \ [9]$ est l'ensemble $F = \{ 9k + 5,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Résolvons l'équation $3x \equiv 6 \ [9]$:

Nous proposons deux méthodes.

Méthode 1, une « table des restes » :

Construisons une table des restes semblable à celle de la question 1 mais avec le coefficient 3 à la place de 4.

Si $x \equiv \cdots \ [9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3r =$	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$3x \equiv \cdots \ [9]$	0	3	6	0	3	6	0	3	6

Par simple lecture de la table, nous repérons, s'il y en a, les colonnes où l'élément de la troisième ligne (celle de $3x \equiv \cdots \ [9]$) est égal à 6. Exactement trois colonnes sont est concernées, les colonnes « 2 », « 5 » et « 8 » (surlignées en jaune).

La lecture du tableau détermine ainsi que : $3x \equiv 6 \ [9]$ si et seulement si $\begin{cases} x \equiv 2 \ [9] \\ \text{ou bien} \\ x \equiv 5 \ [9] \\ \text{ou bien} \\ x \equiv 8 \ [9] \end{cases}$

Revenons à la définition d'une congruence modulo 9 : $x \equiv 8 \ [9]$ si et seulement si il existe un entier relatif *k* tel que $x = 2 + 9k$ ou bien $x = 5 + 9k$ ou bien $x = 8 + 9k$.

L'ensemble des entiers relatifs *x* solutions de $3x \equiv 6 \ [9]$ est l'ensemble :

$$F = \{ 9k + 2, \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{ 9k + 5, \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{ 9k + 8, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

NB. La table des restes nous apprend que l'entier 3 ne possède aucun « inverse modulo 9 ». En conséquence, la méthode développée à la question 2 ne peut pas être mise en œuvre. Cherchons autre chose …

Méthode 2, retour à la définition d'une congruence :

Par définition de la relation de congruence modulo 9, la congruence $3x \equiv 6 \ [9]$ est vérifiée si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que : $3x - 6 = 9k$, c'est-à-dire tel que $3x - 6 - 9k = 0$.

Or : $3x - 6 - 9k = 3 \times (x - 2 - 3k)$. La relation $3x - 6 - 9k = 0$ est donc équivalente à la relation : $x - 2 - 3k = 0$.

L'ensemble des entiers relatifs *x* solutions de $3x \equiv 6 \ [9]$ est l'ensemble :

$$F = \{ 3k + 2, \ k \in \mathbb{Z} \}.$$

L'appartenance à *F* d'un entier relatif *x* peut s'exprimer aussi bien en termes de congruences :

$3x \equiv 6 \ [9]$ si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que $x = 3k + 2$, c'est-à-dire si et seulement si $x \equiv 2 \ [3]$.

On remarquera que la réunion $\{\,9k+2,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\,9k+5,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\,9k+8,\ k \in \mathbb{Z}\}$ trouvée avec la « méthode 1 » est le même ensemble que $\{\,3k+2,\ k \in \mathbb{Z}\,\}$. En effet, un entier est congru à 2 ou 5 ou 8 modulo 9 si et seulement s'il est congru à 2 modulo 3. Deux formulations différentes mais aussi recevables l'une que l'autre pour un même ensemble.

Commentaire sur l'exercice :

L'exercice propose la résolution de trois équations du type $ax \equiv b\ \ [9]$ où le coefficient a est égal, tour à tour, à 4, à 7 et à 3. Nous relevons des différences caractéristiques entre les cas de 4 et de 7 d'une part et le cas de 3 d'autre part. Notamment :

- Les entiers 4 et 7 possèdent des « inverses modulo 9 » tandis que l'entier 3 n'en possède pas.
- Dans les cas de 4 et 7, la congruence $ax \equiv b\ \ [9]$ est équivalente à une unique congruence $x \equiv \cdots\ \ [9]$ alors que dans le cas de 3 une telle équivalence n'a pas lieu.

Nous laissons au lecteur le soin de méditer sur la cause de ces différences.