

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

La congruence



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

22

Correction

Voici un exercice où l'usage de l'outil des congruences est sérieusement concurrencé par d'autres méthodes aussi performantes. Le lecteur pourra comparer.

1. Déterminons les entiers relatifs n tels que $n^2 - 2n$ est divisible par 7 :

Méthode 1 (sans congruences)

Utilisons la factorisation $n^2 - 2n = n \times (n - 2)$. Le nombre 7 étant un nombre premier, il divise un produit de facteurs si et seulement s'il divise au moins l'un des facteurs.

- Ou bien 7 divise n , ce qui a lieu si et seulement si n est de la forme $n = 7k$ avec k entier relatif.
- Ou bien 7 divise $(n - 2)$, ce qui a lieu si et seulement si n est de la forme $n = 2 + 7k$ avec k entier relatif.

$n^2 - 2n$ est divisible par 7 si et seulement si n est de la forme $n = 7k$ ou bien $n = 2 + 7k$ avec k entier relatif.

Méthode 2 (avec congruences ... et Python)

Soit n un entier relatif et r le reste de sa division euclidienne par 7. Nous disposons la congruence $n \equiv r \pmod{7}$ qui implique la congruence $n^2 - 2n \equiv r^2 - 2r \pmod{7}$. Le reste r pouvant prendre les valeurs entières de 0 à 6, nous calculons pour chacune de ces valeurs le nombre $r^2 - 2r$ et le reste de sa division par 7. Nous retiendrons les cas où ce nombre est congru à 0 modulo 7.

NB. En discutant suivant la valeur du reste de la division euclidienne par 7 d'un entier, nous nous engageons dans un raisonnement par disjonction des cas (7 cas possibles). Nous pourrions confectionner un « tableau de congruences » pour notre investigation au cas par cas, mais, aussi bien, nous pouvons confier ces calculs répétitifs à un algorithme Python. C'est l'option que nous choisissons aujourd'hui.

<p>L'algorithme est muni d'un argument p, qui représente le nombre par lequel on veut tester la divisibilité</p> <p>Nous utilisons une boucle « for ».</p> <p>L'instruction « $(r^2 - 2r) \% p$ » renvoie le reste de la division euclidienne de $r^2 - 2r$ par p.</p> <p>Nous exécutons l'algorithme avec $p = 7$.</p>	<pre>>>> def congru22(p): for r in range(0,p): u=(r*r-2*r)%p print("si modulo",p," n est congru à",r, ", alors n^2-2n est congru à",u) >>> congru22(7) si modulo 7 n est congru à 0 , alors n^2-2n est congru à 0 si modulo 7 n est congru à 1 , alors n^2-2n est congru à 6 si modulo 7 n est congru à 2 , alors n^2-2n est congru à 0 si modulo 7 n est congru à 3 , alors n^2-2n est congru à 3 si modulo 7 n est congru à 4 , alors n^2-2n est congru à 1 si modulo 7 n est congru à 5 , alors n^2-2n est congru à 1 si modulo 7 n est congru à 6 , alors n^2-2n est congru à 3</pre>
--	--

Nous relevons deux cas où le nombre $n^2 - 2n$ est congru à 0 modulo 7, en concordance avec la première méthode.

$n^2 - 2n$ est divisible par 7 si et seulement si n est congru à 0 ou à 2 modulo 7.

2. Déterminons les entiers relatifs n tels que $n^2 - 2n$ est divisible par 8 :

L'entier 10 n'est pas un nombre premier, la « méthode 1 » de la question précédente ne peut plus être appliquée. En revanche, la « méthode 2 » est toujours d'actualité.

C'est dans cette perspective que nous avons choisi un algorithme Python adaptable à différents entiers plutôt qu'un « tableau de congruences » pour nous aider.

<p>Exécutons l'algorithme avec $p = 8$.</p> <p>Nous relevons quatre cas où le nombre $n^2 - 2n$ est congru à 0 modulo 8.</p>	<pre>>>> congru22(8) si modulo 8 n est congru à 0 , alors n^2-2n est congru à 0 si modulo 8 n est congru à 1 , alors n^2-2n est congru à 7 si modulo 8 n est congru à 2 , alors n^2-2n est congru à 0 si modulo 8 n est congru à 3 , alors n^2-2n est congru à 3 si modulo 8 n est congru à 4 , alors n^2-2n est congru à 0 si modulo 8 n est congru à 5 , alors n^2-2n est congru à 7 si modulo 8 n est congru à 6 , alors n^2-2n est congru à 0 si modulo 8 n est congru à 7 , alors n^2-2n est congru à 3</pre>
--	---

$n^2 - 2n$ est divisible par 8 si et seulement si n est congru à 0 ou à 2, ou à 4 ou à 6 modulo 7. Nous remarquons que ces quatre cas regroupent tous les cas où n est un nombre pair et eux seuls. Nous pouvons conclure :

$n^2 - 2n$ est divisible par 8 si et seulement si n est un nombre pair.

NB. Nous laissons au lecteur le soin d'élaborer lui-même, s'il le souhaite, une solution spécifique au cas de 8 n'utilisant pas les congruences. Se proposer de montrer que « $n^2 - 2n$ est divisible par 8 si et seulement si n est un nombre pair », cela paraît être un objectif abordable.