# Maths Expertes
## Terminale

# La congruence

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# La congruence

21

## Correction

NB. De façon générale, soit $N$ un entier naturel non nul s'écrivant en numération décimale :

$N = \overline{c_n \dots c_1 c_0}$ où $0 \leq c_i \leq 9$ pour tout $i$ tel que $0 \leq i \leq n$ et où en outre $c_n \neq 0$.

Les $(n+1)$ entiers $c_0$ , $c_1, \dots, c_n$ sont les *chiffres* de l'écriture décimale de $N$.

Le nombre formé par « les autres chiffres » après « séparation du chiffre des unités » est le nombre de dizaines de l'entier $N$, soit le nombre $D = c_n \times 10^{n-1} + \cdots + c_1$.

L'entier $N$ s'exprime en fonction de $D$ et de $c_0$ sous la forme $N = 10D + c_0$ avec, puisque $c_0$ est le chiffre des unités, $0 \leq c_0 \leq 9$.

Tel qu'il est décrit, le critère de divisibilité par 7 revient à associer à $N$ le nombre $m = D - 2c_0$ , qui, si $N$ s'écrit avec au moins deux chiffres, est au moins 10 fois plus petit que lui.

**1. a et b. Déterminons si, oui ou non, 4361 et 542 sont divisibles par 7 :**

Le critère de divisibilité par 7 décrit le remplacement d'un entier $N$ par son associé $m$. Ce procédé peut éventuellement être itéré (cas de 4361 ci-dessous). On arrête le processus lorsqu'on aboutit à un nombre dont on sait, notoirement, si c'est un multiple de 7 ou non.

| $N$ | 4361 | 434 | 542 |
|---|---|---|---|
| $m$ | $436 - 2 = 434$ | $43 - 8 = 35 = 5 \times 7$ | $54 - 4 = 50$ |
| Divisible par 7 ? | comme 434 | oui | non |

NB. Désormais, on ne considère que des nombres $N$ s'écrivant avec trois chiffres significatifs $\overline{abc}$ :

$$N = a \times 10^2 + b \times 10 + c = 100a + 10b + c$$

**2.a. Montrons que $N \equiv 2a + 3b + c \ [7]$ :**

Nous avons vu que $N = 100a + 10b + c$.

Utilisons les deux divisions euclidiennes : $10 = 1 \times 7 + 3$ et $100 = 14 \times 7 + 2$ :

$N = (14 \times 7 + 2)a + (7 + 3)b + c = (2a + 3b + c) + 7 \times (14a + b)$.

Donc : $N = (2a + 3b + c) + 7 \times (14a + b)$.

Les entiers $N$ et $2a + 3b + c$ diffèrent d'un multiple de 7, ils sont congrus modulo 7.

Nous obtenons bien : $N \equiv 2a + 3b + c \ [7]$.

**2.b. Explicitons $m$ et montrons que $m \equiv 3a + b - 2c \ [7]$ :**

Dans le cas où $N$ s'écrit avec trois chiffres, $N = 100a + 10b + c = 10 \times (10a + b) + c$.

Le nombre de dizaines de $N$ est le nombre $D = 10a + b$

L'entier $m$ décrit dans le critère est l'entier : $m = 10a + b - 2c$

Nous pouvons écrire : $m = (3a + b - 2c) + 7a$.

Les entiers $m$ et $3a + b - 2c$ diffèrent d'un multiple de 7, ils sont congrus modulo 7.

Nous obtenons bien : $m \equiv 3a + b - 2c \ [7]$.

**2.c. Montrons que $N - 3m \equiv 0 \ [7]$ et que $m + 2N \equiv 0 \ [7]$ :**

Nous savons qu'en multipliant les deux membres d'une congruence modulo 7 par un même nombre, nous obtenons une nouvelle congruence modulo 7.

Ainsi : $\begin{cases} N \equiv 2a + 3b + c \ [7] & \Rightarrow \ 2N \equiv 4a + 6b + 2c \ [7] \\ m \equiv 3a + b - 2c \ [7] & \Rightarrow \ 3m \equiv 9a + 3b - 6c \ [7] \end{cases}$

Nous savons aussi qu'en ajoutant ou en retranchant membre à membre deux congruences modulo 7, nous obtenons une nouvelle congruence modulo 7.

- D'une part, $\begin{cases} N \equiv 2a + 3b + c \ [7] \\ 3m \equiv 9a + 3b - 6c \ [7] \end{cases} \Rightarrow N - 3m \equiv -7a + 7c \ [7]$ en retranchant membre à membre les deux congruences.
- D'autre part, $\begin{cases} 2N \equiv 4a + 6b + 2c \ [7] \\ m \equiv 3a + b - 2c \ [7] \end{cases} \Rightarrow m + 2N \equiv 7a + 7b \ [7]$ en ajoutant membre à membre les deux congruences.

Les deux nombres obtenus aux deux seconds membres, $-7a + 7c$ et $7a + 7b$, sont des multiples de 7, ils sont tous deux congrus à 0 modulo 7.

Par transitivité de la relation de congruence modulo 7 :

$N - 3m \equiv 0 \ [7]$ et $m + 2N \equiv 0 \ [7]$.

**2.d. Déduisons-en que $N \equiv 0\ [7]$ si et seulement si $m \equiv 0\ [7]$ :**

Supposons que $N \equiv 0\ \ [7]$. En conséquence, $2N \equiv 0\ \ [7]$.

En retranchant membre à membre les deux congruences $m + 2N \equiv 0\ \ [7]$ et $2N \equiv 0\ \ [7]$, nous obtenons la congruence $m \equiv 0\ \ [7]$, ce qui démontre l'implication directe.

$$N \equiv 0\ \ [7]\ \ \Rightarrow m \equiv 0\ \ [7]$$

Supposons réciproquement que $m \equiv 0\ \ [7]$. En conséquence, $3m \equiv 0\ \ [7]$.

En ajoutant membre à membre les deux congruences $N - 3m \equiv 0\ \ [7]$ et $3m \equiv 0\ \ [7]$, nous obtenons la congruence $N \equiv 0\ \ [7]$, ce qui démontre l'implication réciproque.

$$m \equiv 0\ \ [7]\ \ \Rightarrow N \equiv 0\ \ [7]$$

En prenant en compte les deux sens de démonstration :

$$N \equiv 0\ \ [7]\ \ \Leftrightarrow\ \ m \equiv 0\ \ [7]$$

**Concluons.**

Nous savons qu'un entier est divisible par 7 si et seulement si il est congru à 0 modulo 7.

L'équivalence des deux congruences que nous venons de démontrer peut se formuler ainsi :

*N* est divisible par 7 si et seulement si *m* est divisible par 7