Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

20

Correction

NB. Comme l'indique l'énoncé, un entier naturel *a* dont l'écriture décimale est :

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$$

s'exprime en fonction de ses chiffres :

$$a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

.

Cet exercice « revisite » les célèbres critères de divisibilité d'un entier naturel par 3 et par 9. Son intérêt est là et s'y arrête : qu'apporte la notion de congruence dans la justification de ces critères ?

Nous aurons besoin de certaines propriétés des congruences, leur compatibilité avec l'addition et la multiplication, donc avec les combinaisons entières[1], ainsi qu'avec l'élévation à une puissance.

Rappelons aussi :
« *a* divisible par 3 » ⇔ $a \equiv 0 \ [3]$ et de même : « *a* divisible par 9 » ⇔ $a \equiv 0 \ [9]$.

1. Montrons à l'aide des congruences que *a* est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 :

Nous reprenons la notation $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ du préambule. L'outil des congruences va servir à justifier que $a \equiv a_0 + a_2 + \cdots + a_n \ [3]$.

Pour obtenir une congruence modulo 3 à propos de *a*, et de ses chiffres en numération décimale, nous devons étudier le comportement des puissances de 10 relativement à la congruence modulo 3.

Compte tenu de la division euclidienne : $10 = 3 \times 3 + 1$ nous disposons de la congruence stratégique : $10 \equiv 1 \ [3]$

En vertu de la compatibilité avec l'élévation à une puissance, $10^p \equiv 1^p \ [3]$ pour tout entier naturel *p*. Mais 1 est invariant par élévation à une puissance, les puissances de 1 sont toutes égales à 1.

[1] Une « combinaison entière » d'éléments est un cocktail de multiplications par des entiers relatifs et d'additions de ces éléments.

Quel que soit l'entier naturel p : $10^p \equiv 1 \ [3]$

En vertu de la compatibilité avec les combinaisons entières, nous pouvons remplacer chaque puissance de dix par 1, nombre auquel chacune est congrue modulo 3 :

$$a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} \ldots + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} \ldots + a_1 + a_0 \ [3]$$

Nous obtenons : $a \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0 \ \ [3]$

Compte tenu de cette congruence, si l'un des deux nombres a ou bien $a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0$ est congru à 0 modulo 3, alors l'autre est aussi, simultanément, congru à 0 modulo 3.

$$a \equiv 0 \ [3] \quad \Leftrightarrow \quad a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0 \ \equiv 0 \ [3]$$

Il s'agit là de la formulation « façon congruences » de la divisibilité par 3. En langage plus courant :

« a divisible par 3 » $\Leftrightarrow$ « $a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0$ divisible par 3 ».

2. Montrons à l'aide des congruences que *a* est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9 :

Nous avons la même congruence stratégique modulo 9, à savoir la congruence $10 \equiv 1 \ [9]$.

Il en résulte que la démarche est en tout point identique à celle de la question précédente, il suffit uniquement de remplacer le modulo, nous remplaçons « [3] » par « [9] ».

« a divisible par 9 » $\Leftrightarrow$ « $a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0$ divisible par 9.

3. Etudions un exemple :

Le nombre 983 652 145 784 512 369 566 est-il divisible par 3 ?

Calculons la somme de ses chiffres. Ou plutôt, au lieu de calculer la somme de tous ses chiffres, calculons la somme de ceux de ses chiffres qui ne sont pas divisibles par 3. Il est en effet inutile, modulo 3, de comptabiliser ces chiffres-là.

$$8 + \ 5 + 2 + 1 + 4 + 5 + 7 + 8 + 4 + 5 + 1 + 2 + 5 = 57 = 19 \times 3$$

Cette somme étant divisible par 3, le nombre 983 652 145 784 512 369 566 est divisible par 3.

Le nombre 983 652 145 784 512 369 566 est-il divisible par 9 ?

Ajoutons à la somme précédente ceux de ses chiffres qui sont multiples de 3 mais qui ne sont pas multiples de 9 : $57 + 3 + 6 + 3 + 6 + 6 + 6 = 87 = 9 \times 9 + 6$ (raison analogue, inutile de comptabiliser modulo 9 le chiffre 9).

Cette somme n'est pas divisible par 9, 983 652 145 784 512 369 566 n'est pas divisible par 9.

Le reste de sa division euclidienne par 9 est égal à 6.