Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

19

Correction

1. Démontrons que $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5 pour tout entier naturel *n* :

Pour cela, nous allons montrer que ce nombre est congru à 0 modulo 5 pour tout entier naturel *n*.

Nous proposons deux méthodes, aussi légitimes l'une que l'autre. La méthode 2 est cependant plus rapide.

Méthode 1 :

Remarquons que $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1$ et que $3^4 = 81 = 16 \times 5 + 1$. Le reste de la division euclidienne de chacun de ces deux nombres par 5 est égal à 1.

Nous disposons donc des deux congruences stratégiques : $2^4 \equiv 1\ [5]$ et $3^4 \equiv 1\ [5]$

Par compatibilité avec l'élévation à une puissance, ces congruences impliquent que, pour tout entier naturel *n*, $(2^4)^n \equiv 1^n\ [5]$ et $(3^4)^n \equiv 1^n\ [5]$, autrement dit : $2^{4n} \equiv 1\ [5]$ et $3^{4n} \equiv 1\ [5]$

Or : $2^{4n+1} + 3^{4n+1} = 2 \times 2^{4n} + 3 \times 3^{4n}$.

Par compatibilité avec les opérations dans $\mathbb{N}$ (addition et multiplication) :

$$2^{4n+1} + 3^{4n+1} = 2 \times 2^{4n} + 3 \times 3^{4n} \equiv 2 \times 1 + 3 \times 1\ [5]$$

Mais $2 \times 1 + 3 \times 1 = 5 \equiv 0\ [5]$

Par transitivité de la relation de congruence : $2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 0\ [5]$.

$2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5 pour tout entier naturel *n*.

Méthode 2 :

Remarquons que $3 \equiv -2 \quad [5]$ puisque la différence entre ces deux nombres est un multiple de 5.

Par compatibilité avec l'élévation à une puissance (en l'occurrence la puissance $4n+1$), cette congruence implique que, pour tout entier naturel *n*, $\quad 3^{4n+1} \equiv (-2)^{4n+1} \quad [5]$

Or, le nombre entier $4n+1$ est un nombre impair. Nous en déduisons que $(-2)^{4n+1} = -(2^{4n+1})$ et par conséquent que $3^{4n+1} \equiv -2^{4n+1} \quad [5]$.

Cette congruence équivaut à : $\quad 3^{4n+1} + 2^{4n+1} \equiv 0 \ \ [5]$.

NB. Cette méthode établirait aussi bien que pour tout entier naturel *n*, $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0 \ \ [5]$ puisque l'argument majeur de la démonstration est l'imparité de l'exposant utilisé. Nous aurions pu considérer l'exposant un peu plus général $2n+1$ au lieu de $4n+1$. Le résultat aurait été le même.

2. Montrons « par disjonction des cas » que $n(n^2+5)$ est divisible par 3 :

Soit *n* un entier relatif et *r* le reste de sa division euclidienne par 3.

Nous disposons la congruence $n \equiv r \quad [3]$ et il nous reste à déterminer une congruence modulo 3 portant sur $n(n^2+5)$. Le reste *r* pouvant prendre les valeurs 0, 1 ou 2, nous aurons trois cas de figure à considérer.

Un « tableau de congruence » peut rendre compte commodément de la discussion.

Si $n \equiv \cdots \quad [3]$	0	1	2
$r^2 + 5 =$	5	6	9
$n^2 + 5 \equiv \cdots [3]$	2	0	0
$n \times (n^2+5) \equiv \cdots [3]$	0	0	0

Quel que soit le cas de figure, le nombre $n \times (n^2+5)$ est toujours congru à 0 modulo 3. On remarque à l'aide du tableau que, quand ce n'est pas *n* qui est congru à 0 modulo 3, c'est le nombre n^2+5 qui l'est.

Le nombre $n(n^2+5)$ est divisible par 3 quel que soit l'entier *n*.