

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

La congruence



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

18

Correction

Voir sur ce même thème l'exercice numéro 14.

1. Justifions que si (x, y) est solution de (E), alors $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$:

Dire que (x, y) est solution de (E) revient à dire que $x^2 - 3 = 7y^2$. La différence $x^2 - 3$ étant un multiple de 7, les deux nombres en jeu sont congrus modulo 7.

Si le couple (x, y) est solution de (E), alors x vérifie la congruence $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$.

NB. Pour qu'un couple (x, y) d'entiers relatifs soit susceptible d'être solution, il faut que le carré de x soit congru à 3 modulo 7. Sans quoi, le couple ne peut pas être un couple solution. Cette condition est une *condition nécessaire* d'existence de solution.

2. Déterminons les restes possibles de la division euclidienne d'un carré par 7 :

Soit x un entier relatif et r le reste de sa division euclidienne par 7.

Nous disposons la congruence $x \equiv r \pmod{7}$ qui implique la congruence $x^2 \equiv r^2 \pmod{7}$. Le reste r pouvant prendre les valeurs entières de 0 à 6, nous calculons pour chacune de ces valeurs le nombre r^2 (ligne intermédiaire) et, le cas échéant, nous écrivons sa division euclidienne par 7.

Nous utilisons ainsi les divisions euclidiennes :

$$9 = 1 \times 7 + 2; \quad 16 = 2 \times 7 + 2; \quad 25 = 3 \times 7 + 4; \quad 36 = 5 \times 7 + 1.$$

Si $x \equiv \dots \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
$r^2 =$	0	1	4	9	16	25	36
$x^2 \equiv \dots \pmod{7}$	0	1	4	2	2	4	1

Les restes possibles de la division euclidienne d'un carré par 7 sont 0, 1, 2 et 4.

NB. Nous avons donc été amenés à discuter suivant les valeurs du reste de la division euclidienne de x par 7. Nous avons raisonné par *disjonction des cas* (7 cas possibles).

3. Déduisons-en que l'équation (E) n'a pas de solution :

La valeur 3 n'est présente dans la troisième ligne du tableau de la question précédente dans aucune des colonnes. Ce n'est pas un « reste possible ».

La congruence $x^2 \equiv 3 [7]$, qui est, comme nous l'avons noté, une *condition nécessaire* d'existence d'un couple solution ne peut donc jamais être satisfaite.

L'équation (E) n'a pas de solution.