Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Freemaths : Tous droits réservés

La congruence

17

Correction

NB. Rappelons la compatibilité de la relation de congruence modulo *n*, avec l'addition, la multiplication et l'élévation à une puissance.

1. Déterminons le reste de la division euclidienne de $A = 451 \times 6^{43} - 912$ par 7 :

Cherchons d'abord des nombres plus commodes auxquels 451 et -912 sont congrus modulo 7.
Pour cela, nous allons écrire les divisions euclidiennes de chacun d'eux par 7.

Une calculatrice nous indique que

$64 \times 7 \leq 451 < 65 \times 7$ et que

$(-131) \times 7 \leq -912 < (-130) \times 7$

Ce qui nous permet d'écrire les divisions euclidiennes :

$451 = 64 \times 7 + 3$

$-912 = (-131) \times 7 + 5$

$\frac{451}{7}$	64.4286
$64 \cdot 7$	448
$451=64 \cdot 7+3$	true
$\frac{-912}{7}$	-130.286
$-131 \cdot 7$	-917
$-912=-131 \cdot 7+5$	true

Chacun de ces deux nombres est congru modulo 7 au reste de sa division euclidienne par 7.
Ainsi : $451 \equiv 3 \ [7]$ et $-912 \equiv 5 \ [7]$

En vertu de la compatibilité de la congruence modulo 7 avec l'addition et la multiplication, nous obtenons la congruence : $451 \times 6^{43} - 912 \equiv 3 \times 6^{43} + 5 \ [7]$.
Le reste de la division euclidienne de $A = 451 \times 6^{43} - 912$ par 7 est le même que celui de la division euclidienne de $B = 3 \times 6^{43} + 5$ par 7.

Occupons-nous maintenant de la puissance de 6.

Remarquons que $6^2 = 36 = 5 \times 5 + 1$ donc : $6^2 \equiv 1 \quad [7]$.

En raison de la compatibilité avec l'élévation à une puissance, cette congruence implique que pour tout entier naturel *p* : $(6^2)^p \equiv 1^p \quad [7]$, autrement dit $6^{2p} \equiv 1 \quad [7]$ et, par la même occasion : $6^{2p+1} \equiv 6 \quad [7]$

Les puissances paires de 6 sont congrues à 1 modulo 7 et les puissances impaires de 6 (ce qui est le cas de 43) sont congrues à 6 modulo 7.

Nous en déduisons que le nombre $B = 3 \times 6^{43} + 5$ est congru à $3 \times 6 + 5$ soit à 23 modulo 7.

Or la division euclidienne de 23 par 7 est : $23 = 3 \times 7 + 2$,

Les nombres *A, B,* 23 et 2 sont congrus entre eux modulo 7. La condition $0 \leq 2 < 7$ justifie le fait que 2 est, pour chacun de ces nombres, le reste de sa division euclidienne par 7.

Le reste de la division euclidienne de $A = 451 \times 6^{43} - 912$ par 7 est égal à 2.

2. Montrons que, si *n*² est pair, *n* est pair :

Nous mettons en œuvre un raisonnement par contraposition (voir exercice numéro 07 à ce propos). Les congruences, en l'occurrence la congruence modulo 2, ne servent ici qu'à formuler le fait qu'un entier est pair (il est pair si et seulement s'il est congru à 0 modulo 2) ou bien impair (il est impair si et seulement s'il est congru à 1 modulo 2). On pourrait s'en passer.

Nous avons l'implication : $n \equiv 1 \quad [2] \quad \Rightarrow \quad n^2 \equiv 1 \quad [2]$ (par compatibilité de la congruence modulo 2 avec l'élévation au carré).

Donc, par contraposition : $non(n^2 \equiv 1 \quad [2]) \quad \Rightarrow \quad non(n \equiv 1 \quad [2])$ autrement dit :

$n^2 \equiv 0 \quad [2] \quad \Rightarrow \quad n \equiv 0 \quad [2]$

Si n^2 est pair, alors *n* est pair.

3. Cherchons dans quels cas le nombre $3 \times 4^n + 2$ est divisible par 11 :

Nous allons étudier la suite des restes des divisions euclidiennes des puissances de 4 par 11.

Pour tout entier naturel *n*, désignons par r_n le reste de la division euclidienne de 4^n par 11.

- Nous avons d'une part : $4^n \equiv r_n \ [11]$ avec *a priori* $0 \leq r_n < 11$ (mais comme aucune puissance de 4 n'est divisible par 11, r_n ne prend jamais la valeur 0).
- Nous avons d'autre part $4^{n+1} = 4 \times 4^n$ donc $r_{n+1} \equiv 4 \times r_n \ [11]$

Nous disposons de la congruence : $3 \times 4^n + 2 \equiv 3r_n + 2 \ [11]$.
De ce fait, le nombre $3 \times 4^n + 2$ est divisible par 11 si et seulement si $3r_n + 2$ est divisible par 11, c'est-à-dire si et seulement si $3r_n + 2 \equiv 0 \ [11]$.

Résoudre la question revient à déterminer les valeurs de *n* pour lesquelles le nombre $3r_n + 2$ est congru à 0 modulo 11.

Etudions les premiers termes de cette suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $4^0 = 1$ donc $r_0 = 1$.
- $4^1 = 4$ donc $r_1 = 4$.
- $4^2 = 16 = 1 \times 11 + 5$ donc $r_2 = 5$.
- $4^3 = 4 \times 4^2 \equiv 4 \times 5 \ [11]$. Or $4 \times 5 = 20 = 1 \times 11 + 9$ donc $4^3 \equiv 9 \ [11]$ et $r_3 = 9$.
- $4^4 = 4 \times 4^3 \equiv 4 \times 9 \ [11]$. Or $4 \times 9 = 36 = 3 \times 11 + 3$ donc $4^4 \equiv 3 \ [11]$ et $r_4 = 3$.
- $4^5 = 4 \times 4^4 \equiv 4 \times 3 \ [11]$. Or $4 \times 3 = 12 = 1 \times 11 + 1$ donc $4^5 \equiv 1 \ [11]$ et $r_5 = 1$.

De façon analogue aux deux questions précédentes, la congruence $4^5 \equiv 1 \ [11]$ est une congruence stratégique. En raison de la compatibilité avec l'élévation à une puissance, elle implique que pour tout entier naturel *p* : $(4^5)^p \equiv 1^p \ [11]$, autrement dit $4^{5p} \equiv 1 \ [11]$

Nous en déduisons que la suite des restes $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des divisions euclidiennes des puissances de 4 par 11 est une suite périodique de période 5.

Freemaths : Tous droits réservés

Il reste à voir dans quels cas (s'il en existe) le nombre $3r_n + 2$ est congru à 0 modulo 11.

Synthétisons dans un tableau les différents cas possibles :

Forme de *n*	r_n	$3r_n + 2$
$5p$	1	5
$5p + 1$	4	$14 \equiv 3\ [11]$
$5p + 2$	5	$17 \equiv 6\ [11]$
$5p + 3$	9	$29 \equiv 7\ [11]$
$5p + 4$	3	$11 \equiv 0\ [11]$

Nous relevons un cas de figure et un seul pour lequel le nombre $3r_n + 2$ est congru à 0 modulo 11, le cas où $n = 5p + 4$.

Par lecture du tableau, $3 \times 4^n + 2$ est divisible par 11 si et seulement si *n* est un entier de la forme $n = 5p + 4$ avec *p* entier naturel.