Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

14

Correction

NB. Rappelons une propriété des congruences, leur compatibilité avec l'élévation à une puissance. Il en est ainsi de la relation de congruence modulo 7,

Si $a \equiv b \ [7]$, alors $a^n \equiv b^n \ [7]$ pour tout entier naturel n.

1. Vérifions que $100 \equiv 2 \ [7]$:

$100 - 2 = 98 = 14 \times 7$. Cette différence étant un multiple de 7 :

La congruence $100 \equiv 2 \ [7]$ est bien vérifiée.

2. Montrons que si (x, y) est solution de (E), alors $3x^2 \equiv 2^n \ [7]$:

Dire que (x, y) est solution de (E) revient à dire que $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} = (10^2)^n = 100^n$ autrement dit que $3x^2 - 100^n = -7y^2$.

La différence $3x^2 - 100^n$ étant un multiple de 7, les deux nombres en jeu sont congrus modulo 7 : $3x^2 \equiv 100^n \ [7]$

Or, en vertu de la compatibilité avec l'élévation à une puissance, la congruence $100 \equiv 2 \ [7]$ vue à la question 1 implique que pour tout entier naturel n, $100^n \equiv 2^n \ [7]$.

Par transitivité : $\begin{cases} 3x^2 \equiv 100^n \ [7] \\ 100^n \equiv 2^n \ [7] \end{cases} \Rightarrow 3x^2 \equiv 2^n \ [7].$

3. Complétons le tableau proposé :

Soit x un entier relatif et r le reste de sa division euclidienne par 7. Nous disposons de la congruence $x \equiv r \ [7]$ qui implique la congruence $3x^2 \equiv 3r^2 \ [7]$.

Le reste r pouvant prendre les valeurs entières de 0 à 6, nous calculons pour chacune de ces valeurs le nombre $3r^2$ (ligne intermédiaire) et, le cas échéant, nous écrivons sa division euclidienne par 7.

Nous sommes amenés à utiliser les divisions euclidiennes suivantes :

$12 = 1 \times 7 + 5$; $27 = 3 \times 7 + 6$; $48 = 6 \times 7 + 6$; $75 = 10 \times 7 + 5$ et $108 = 15 \times 7 + 3$

Si $x \equiv \cdots \ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$3r^2 =$	0	3	12	27	48	75	108
$3x^2 \equiv \cdots [7]$	0	3	5	6	6	5	3

4. Montrons que les puissances de 2 sont congrues à 1, 2 ou 4 modulo 7 :

Pour cela, étudions la suite des restes des divisions euclidiennes des puissances de 2 par 7.

Nous avons successivement : $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8 = 1 \times 7 + 1$

Nous obtenons ainsi la congruence stratégique : $2^3 \equiv 1 \ [7]$.

L'entier 1 est invariant par élévation à une puissance entière (les puissances entières de 1 sont toutes égales à 1). Par compatibilité avec l'élévation à une puissance, nous obtenons que pour tout entier naturel *p* : $(2^3)^p = 2^{3p} \equiv 1 \ [7]$

De la congruence $2^{3p} \equiv 1 \ [7]$ nous déduisons les deux autres congruences :

$2^{3p+1} = 2 \times 2^p \equiv 2 \ [7]$ et $2^{3p+2} = 4 \times 2^p \equiv 4 \ [7]$.

En résumé, soit *n* un entier naturel. Discutons suivant le reste de sa division euclidienne par 3 :

- Si *n* est de la forme $3p$ (*p* entier naturel), alors $2^n = 2^{3p} \equiv 1 \ [7]$
- Si *n* est de la forme $3p + 1$ (*p* entier naturel), alors $2^n = 2^{3p+1} \equiv 2 \ [7]$
- Si *n* est de la forme $3p + 2$ (*p* entier naturel), alors $2^n = 2^{3p+2} \equiv 4 [7]$

La suite des restes des divisions euclidiennes des puissances de 2 par 7 est une suite périodique de période 3 qui prend les valeurs 1, 2, 4. Nous avons bien démontré que les puissances de 2 sont congrues à 1, 2 ou 4 modulo 7.

5. Concluons :

Aucune des trois valeurs 1, 2 ou 4 n'est présente dans le tableau de la question 3. La congruence $3x^2 \equiv 2^n \ [7]$, qui est une *condition nécessaire* d'existence de solution, ne peut donc jamais être satisfaite.

L'équation (E) n'a pas de solution.