Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

13

Correction

L'équation (E) est ici l'équation $11x^2 - 7y^2 = 5$

1. Justifions que si (x, y) est solution de (E), alors $x^2 \equiv 2y^2 \ [5]$:

Dire que (x, y) est solution de (E) revient à dire que $11x^2 - 7y^2 = 5$. La différence $11x^2 - 7y^2$ étant un multiple de 5, les deux nombres en jeu sont congrus modulo 5 : $11x^2 \equiv 7y^2 \ [5]$.

De plus, les divisions euclidiennes : $11 = 2 \times 5 + 1$ et $7 = 1 \times 5 + 2$ montrent que $11 \equiv 1 \ [5]$ et que $7 \equiv 2 \ [5]$.

On sait que, dans une congruence modulo *n*, on peut substituer à un nombre un autre nombre auquel il est congru :

$$\begin{cases} 11x^2 \equiv 7y^2 \ [5] \\ 11 \equiv 1 \ [5] \\ 7 \equiv 2 \ [5] \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 \equiv 2y^2 \ [5]$$

Si le couple (x, y) est solution de (E), alors ce couple vérifie la congruence $x^2 \equiv 2y^2 \ [5]$

NB. Pour qu'un couple (x, y) d'entiers relatifs soit susceptible d'être solution, il faut que ce couple vérifie cette congruence. Sans quoi, le couple ne peut pas être un couple solution. Cette condition est une *condition nécessaire* d'existence de solution.

2. Déduisons-en qu'alors *x* et *y* sont des multiples de 5 :

Pour cela nous allons étudier à quels nombres un carré, et le double d'un carré, peuvent être congrus modulo 5. Quels sont les restes possibles de leur division euclidienne par 5 ?

Confectionnons à cet effet un « tableau de congruence » modulo 5.

Soit *x* un entier relatif et *r* le reste de sa division euclidienne par 5.

Nous disposons la congruence $x \equiv r \ [5]$ qui implique la congruence $x^2 \equiv r^2 \ [5]$. Le reste *r* pouvant prendre les valeurs entières de 0 à 4, nous calculons pour chacune de ces valeurs le nombre r^2 et, le cas échéant, nous écrivons sa division euclidienne par 5. Nous en déduisons deux congruences, l'une concernant x^2, l'autre concernant $2x^2$, avec des nombres de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Nous utilisons ainsi les divisions euclidiennes suivantes :

$9 = 1 \times 5 + 4$; $16 = 3 \times 5 + 1$ et, pour la dernière ligne, $2 \times 4 = 8 = 1 \times 5 + 3$.

Si $x \equiv \cdots \ [5]$	0	1	2	3	4
$r^2 =$	0	1	4	9	16
$x^2 \equiv \cdots [5]$	0	1	4	4	1
$2x^2 \equiv \cdots [5]$	0	2	3	3	2

NB. Nous avons discuté des restes possibles suivant les valeurs du reste de la division euclidienne de *x* par 5. Nous avons ainsi raisonné par disjonction des cas (5 cas possibles).

La congruence $x^2 \equiv 2y^2 \ [5]$ est vérifiée lorsque x^2 et $2y^2$ ont le même reste dans leur division euclidienne par 5.

Or, le tableau de congruences montre que, hormis la valeur 0, il n'y a aucune autre valeur commune entre les deux dernières lignes. Il ne peut y avoir concordance du reste modulo 5 entre un carré et le double d'un carré que si ces deux nombres sont, tous deux, congrus à 0 modulo 5, c'est-à-dire sont, tous deux, des multiples de 5.

Si la congruence $x^2 \equiv 2y^2 \ [5]$ est vérifiée, alors *x* et *y* sont tous deux des multiples de 5.

Nous avons vu que si le couple (x, y) est solution de (E), alors ce couple vérifie la congruence :

$x^2 \equiv 2y^2 \ [5]$.

Tout couple solution, s'il en existe, doit nécessairement satisfaire la condition que nous venons d'énoncer.

Si le couple (x, y) est solution de (E), alors *x* et *y* sont tous deux des multiples de 5

3. Tirons-en des conclusions à propos de l'équation (E) :

D'après la question précédente, si le couple (x, y) est solution de (E), alors *x* et *y* sont tous deux des multiples de 5.

Mais si *x* et *y* sont tous deux des multiples de 5, alors leurs carrés sont tous deux des multiples de 25 et la combinaison entière $11x^2 - 7y^2$ de ces deux nombres est elle aussi un multiple de 25.
Cette combinaison entière de deux multiples de 25 ne peut donc jamais être égale à 5 qui n'est pas un entier multiple de 25.

L'équation (E) n'a pas de solution.

NB. Commentaire sur l'exercice :
Cet exercice aborde un exemple de (tentative de ...) résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'une équation au second degré du type $ax^2 + by^2 = c$ où *a, b, c* sont des coefficients entiers.

En général, la résolution de ce type d'équation est difficile et l'existence de solutions est rare.
C'est pourquoi avant de se lancer dans une aventure délicate, on cherche à savoir s'il y a quelques chances de réussite. On définit à cet effet des conditions nécessaires d'existence de solution et on vérifie si ces conditions nécessaires sont satisfaites. Si elles ne le sont pas, inutile d'aller plus loin.

Ce genre de situation, où l'on prouve qu'une équation n'a pas de solution, fait les choux gras des auteurs de sujets d'arithmétique « experte ». Le lecteur trouvera sur le site freemaths d'autres exemples de telles équations (exercices numéros 14, 18 et 27).