Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

12

Correction

NB. Rappelons une propriété des congruences, leur compatibilité avec l'élévation à une puissance. En particulier, il en est ainsi de la relation de congruence modulo 11 :

Si $a \equiv b \ [11]$, alors $a^p \equiv b^p \ [11]$ pour tout entier naturel *p*.

Rappelons aussi qu'un entier naturel *x* s'écrivant en numération décimale : $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$

s'exprime en fonction de ses chiffres : $x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} \dots + a_1 \times 10 + a_0$.

1. Montrons que $x \equiv (a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots) \ [11]$:

Pour obtenir une congruence modulo 11 à propos de *x*, et de ses chiffres en numération décimale, nous devons étudier le comportement des puissances de 10 relativement à la congruence modulo 11.

Or, vu l'égalité $10 = -1 + 11$, nous disposons de la congruence stratégique :

$$10 \equiv -1 \ [11]$$

En vertu de la compatibilité avec l'élévation à une puissance, $10^p \equiv (-1)^p \ [11]$ pour tout entier naturel *p*.

- Si *p* est un entier pair : $10^p \equiv 1 \ [11]$
- Si *p* est un entier impair : $10^p \equiv -1 \ [11]$

Modulo 11, les puissances paires de 10 sont congrues à 1 et ses puissances impaires à -1.

En vertu de la compatibilité avec l'addition et la multiplication :

$$x \equiv a_n \times (-1)^n + a_{n-1} \times (-1)^{n-1} \dots + a_1 \times (-1) + a_0 \ [11]$$

En regroupant les termes de rang pair et ceux de rang impair, nous obtenons :

$$x \equiv (a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots) \ [11]$$

Nous convenons que le terme a_n achève la somme de l'une des deux parenthèses et son précédent a_{n-1} achève la somme de l'autre (selon la parité de *n*).

2. Déduisons-en un critère de divisibilité par 11 :

Puisque, selon les résultats de la question 1, x et le nombre $S = (a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots)$ sont congrus modulo 11, l'un des deux nombres est congru à 0 modulo 11 si et seulement si l'autre l'est aussi.

Autrement dit, x est divisible par 11 si et seulement si S est divisible par 11.

Or, l'entier S représente la somme des chiffres de rang pair (en considérant que le chiffre des unités est doté du rang 0) diminuée de la somme des chiffres de rang impair (le chiffre des dizaines est doté du rang 1).

Notons également que S est divisible par 11 si et seulement si son opposé $-S$ l'est aussi.

De ce fait, dire « $(a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots)$ est divisible par 11 » équivaut à dire

« $(a_1 + a_3 + \cdots) - (a_0 + a_2 + \cdots)$ est divisible par 11 »

Donc, le résultat ne dépend pas du rang considéré comme initial dans le décompte des rangs. On peut commencer le décompte aussi bien par la droite de l'écriture décimale que par la gauche.

Nous pouvons énoncer :

Un nombre est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

3. Etudions quelques exemples :

NB. Nous commençons le décompte à droite, par le chiffre des unités.

Cas de 10 891 089 dont l'écriture est composée de 8 chiffres :

- Somme des chiffres de rang pair : $9 + 0 + 9 + 0 = 18$
- Somme des chiffres de rang impair : $8 + 1 + 8 + 1 = 18$

Ces deux sommes sont égales, leur différence est nulle (donc divisible par 11).

10 891 089 est divisible par 11.

Cas de 555...55 (100 chiffres) :

L'écriture étant composée de 100 chiffres, il y a 50 chiffres de rang pair et 50 chiffres de rang impair. La somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair sont égales (toutes deux égales à 250), leur différence est nulle (donc divisible par 11).

Ce nombre est divisible par 11.

Cas de 147 856 103, dont l'écriture est composée de 9 chiffres :

- Somme des chiffres de rang pair : $3 + 1 + 5 + 7 + 1 = 17$
- Somme des chiffres de rang impair : $0 + 6 + 8 + 4 = 18$

La différence entre ces deux résultats est égale à -1, elle n'est pas divisible par 11.

147 856 103 n'est pas divisible par 11.