Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

11

Correction

1. a. Complétons-le tableau proposé :

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
3*x*	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**	**27**	**30**	**33**	**36**
r	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**	**2**	**6**	**9**	**12**	**1**	**4**	**7**	**10**

Déduisons-en un entier u de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$ vérifiant $3u \equiv 1 \ [13]$:

L'entier 1 est obtenu dans le tableau une fois et une seule dans la colonne « $x = 9$ ». Le reste de la division euclidienne de 3×9 par 13 étant égal à 1, nous pouvons en déduire que $3 \times 9 \equiv 1 \ [13]$.

Le nombre $u = 9$ est l'unique entier de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 11, \ 12\}$ vérifiant $3 \times u \equiv 1 \ [13]$.

NB. Ce nombre u est appelé un « inverse modulo 13 » du nombre 3. Nous allons en voir une utilisation dans la question suivante.

1b. Montrons que $3a \equiv 0 \ [13]$ si et seulement si $a \equiv 0 \ [13]$:

L'implication $a \equiv 0 \ [13] \implies 3a \equiv 0 \ [13]$ est évidente, car si a est un multiple de 13, tous ses multiples le sont aussi.

Réciproquement, supposons que $3a \equiv 0 \ [13]$. Multiplions par 9 (« l'inverse modulo 13 » de 3) les deux membres de cette congruence. Nous obtenons : $9 \times (3a) \equiv 0 \ [13]$ soit par associativité : $(9 \times 3)a \equiv 0 \ [13]$. La question 1 ayant établi que $9 \times 3 \equiv 1 \ [13]$, nous en déduisons que $a \equiv 0 \ [13]$. Ainsi, réciproquement, $3a \equiv 0 \ [13] \implies a \equiv 0 \ [13]$.

Bilan des deux sens de démonstration : $3a \equiv 0 \ [13] \iff a \equiv 0 \ [13]$.

2.a. Montrons que $N + 3N' \equiv 0 \ [13]$:

Soit *a* et *b* deux entiers naturels et soit $N = 10a + b$.

L'entier *N'* associé à *N* est l'entier $N' = a + 4b$.

Calculons en fonction de *a* et *b* la somme :

$$N + 3N' = (10a + b) + 3(a + 4b) = 13a + 13b = 13 \times (a + b)$$

Cette somme est un multiple de 13, donc $N + 3N' \equiv 0 \ [13]$.

2.b. Montrons que $N \equiv 0 \ [13]$ si et seulement si $N' \equiv 0 \ [13]$:

Tenons compte de la congruence $N + 3N' \equiv 0 \ [13]$ démontrée ci-dessus.

Supposons que $N' \equiv 0 \ [13]$. Alors $\begin{cases} N' \equiv 0 \ [13] \\ N + 3N' \equiv 0 \ [13] \end{cases} \Rightarrow N \equiv 0 \ [13]$.

Supposons réciproquement que $N \equiv 0 \ [13]$. Alors $\begin{cases} N \equiv 0 \ [13] \\ N + 3N' \equiv 0 \ [13] \end{cases} \Rightarrow 3N' \equiv 0 \ [13]$

Or la question 1.b a démontré (en y considérant l'entier $a = 3N'$) que si était vérifiée la congruence $3N' \equiv 0 \ [13]$ alors était vérifiée également la congruence $N' \equiv 0 \ [13]$.

Nous obtenons l'implication réciproque : $N \equiv 0 \ [13] \Rightarrow N' \equiv 0 \ [13]$.

Bilan des deux sens de démonstration : $N \equiv 0 \ [13] \Leftrightarrow N' \equiv 0 \ [13]$.

3.a. Expliquons le critère de divisibilité par 13 :

Soit *N* un nombre s'écrivant en numération décimale : $N = \overline{c_n \dots c_1 c_0}$

Alors : $N = c_n \times 10^n + \cdots + c_1 \times 10 + c_0 = 10 \times (c_n \times 10^{n-1} + \cdots + c_1) + c_0$

On peut lui associer l'expression $N = 10\,D + c_0$ avec $D = c_n \times 10^{n-1} + \cdots + c_1$, le nombre de dizaines de *N*, et c_0, son chiffre de ses unités. Le nombre *N'* qui lui est associé conformément à ce que nous venons d'étudier est l'entier $N' = D + 4c_0$ tel qu'il est décrit dans le critère de divisibilité.

Le critère de divisibilité par 13 décrit le remplacement d'un entier *N* par son associé *N'*. Ce procédé peut éventuellement être itéré (cas de 3224 ci-dessous). On arrête le processus lorsqu'on aboutit à un nombre dont on sait, notoirement, si c'est un multiple de 13 ou non.

3.b. Utilisons le critère de divisibilité par 13 :

N	407	7805	3224	338
N'	$40 + 4 \times 7 = 68$ $68 = 6 \times 13$	$780 + 4 \times 5$ $= 800$	$322 + 4 \times 4$ $= 338$	$33 + 4 \times 8 = 65$ $65 = 5 \times 13$
Divisible par 13 ?	oui	non	Comme 338	oui