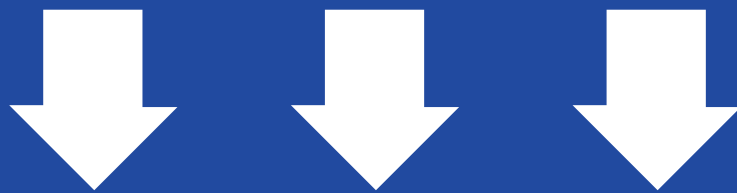


[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

La congruence



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# La congruence

10

## Correction

NB. De façon générale, soit  $N$  un entier naturel non nul s'écrivant en numération décimale :

$$N = \overline{c_n \dots c_1 c_0} \quad \text{où } 0 \leq c_i \leq 9 \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 \leq i \leq n \text{ et où en outre } c_n \neq 0.$$

Les  $(n + 1)$  entiers  $c_0, c_1, \dots, c_n$  sont les *chiffres* de l'écriture décimale de  $N$ .

Alors  $N$  s'exprime ainsi en fonction de ses chiffres :  $N = c_n \times 10^n + \dots + c_1 \times 10 + c_0$ .

Cette expression unique est la « décomposition canonique de  $N$  suivant les puissances de dix », elle caractérise l'entier  $N$ .

**1. Soit  $N = 100a + b$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels ; montrons que  $N$  est divisible par 25 si et seulement si  $b$  est divisible par 25 :**

Nous allons montrer que  $N$  est multiple de 25 si et seulement si  $b$  est un multiple de 25.

La relation  $N = 100a + b$  peut s'écrire aussi bien  $N - b = 25 \times (4a)$ . Le fait que cette différence soit multiple de 25 justifie la congruence :  $N \equiv b \pmod{25}$ .

Puisque  $N$  et  $b$  sont congrus modulo 25, par transitivité de la relation de congruence modulo 25, l'un de ces deux nombres est congru à 0 modulo 25 si et seulement si l'autre est congru à 0 modulo 25.

Nous savons que dire qu'un entier est congru à 0 modulo 25 équivaut à dire que cet entier est divisible par 25.

Nous pouvons conclure :

**$N$  est divisible par 25 si et seulement si  $b$  est divisible par 25.**

NB. On note que l'hypothèse «  $0 \leq b < 100$  » est inactive dans cette question. La propriété démontrée est en fait d'actualité pour tout couple  $(a, b)$  d'entiers relatifs.

### 2. Déduisons-en un critère de divisibilité par 25 :

NB. Ce critère a un intérêt pour les entiers naturels qui s'écrivent avec au moins trois chiffres. Nous supposons dans cette question que tel est le cas.

Reprenons l'écriture en numération décimale  $N = \overline{c_n \dots c_1 c_0}$  où l'on suppose que  $n \geq 2$  ( $N$  s'écrit avec trois chiffres au moins)

Nous pouvons scinder l'expression  $N = c_n \times 10^n + \dots + c_1 \times 10 + c_0$  en une somme de deux nombres :  $N = (c_n \times 10^n + \dots + c_3 \times 10^3 + c_2 \times 10^2) + (c_1 \times 10 + c_0)$ . Soit :

$$N = 100(c_n \times 10^{n-2} + \dots + c_3 \times 10 + c_2) + (c_1 \times 10 + c_0)$$

- L'entier  $a = c_n \times 10^{n-2} + \dots + c_3 \times 10 + c_2$  représente le nombre de centaines de  $N$ .
- L'entier  $b = c_1 \times 10 + c_0$  s'écrit en numération décimale  $b = \overline{c_1 c_0}$ , à l'aide des deux derniers chiffres (dizaines et unités) de l'écriture de  $N$ . Il vérifie la condition  $0 \leq b < 100$  puisque deux chiffres significatifs au plus suffisent à l'écrire. (La condition  $0 \leq b < 100$  apparaît ici).
- Nous avons la relation :  $N = 100a + b$

D'après les résultats de la première question,  $N$  est divisible par 25 si et seulement si  $b$  est divisible par 25.

Nous pouvons énoncer le critère de divisibilité par 25 :

**Un entier est divisible par 25 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25.**

NB. Ce nombre  $b$  doit figurer dans la liste des quatre nombres :  $\{00, 25, 50, 75\}$ .