Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

10

Correction

NB. De façon générale, soit *N* un entier naturel non nul s'écrivant en numération décimale :

$N = \overline{c_n \dots c_1 c_0}$ où $0 \leq c_i \leq 9$ pour tout *i* tel que $0 \leq i \leq n$ et où en outre $c_n \neq 0$.

Les $(n+1)$ entiers c_0 , $c_1, \dots, c_n$ sont les *chiffres* de l'écriture décimale de *N*.

Alors *N* s'exprime ainsi en fonction de ses chiffres : $N = c_n \times 10^n + \dots + c_1 \times 10 + c_0$.

Cette expression unique est la « décomposition canonique de *N* suivant les puissances de dix », elle caractérise l'entier *N*.

1. Soit $N = 100a + b$ avec *a* et *b* entiers naturels ; montrons que *N* est divisible par 25 si et seulement si *b* est divisible par 25 :

Nous allons montrer que *N* est multiple 25 si et seulement si *b* est un multiple de 25.

La relation $N = 100a + b$ peut s'écrire aussi bien $N - b = 25 \times (4a)$. Le fait que cette différence soit multiple de 25 justifie la congruence : $N \equiv b\ [25]$.

Puisque *N* et *b* sont congrus modulo 25, par transitivité de la relation de congruence modulo 25, l'un de ces deux nombres est congru à 0 modulo 25 si et seulement si l'autre est congru à 0 modulo 25.

Nous savons que dire qu'un entier est congru à 0 modulo 25 équivaut à dire que cet entier est divisible par 25.

Nous pouvons conclure :

N est divisible par 25 si et seulement si *b* est divisible par 25.

NB. On note que l'hypothèse « $0 \leq b < 100$ » est inactive dans cette question. La propriété démontrée est en fait d'actualité pour tout couple (a, b) d'entiers relatifs.

2. Déduisons-en un critère de divisibilité par 25 :

NB. Ce critère a un intérêt pour les entiers naturels qui s'écrivent avec au moins trois chiffres. Nous supposerons dans cette question que tel est le cas.

Reprenons l'écriture en numération décimale $N = \overline{c_n \ldots c_1 c_0}$ où l'on suppose que $n \geq 2$ (N s'écrit avec trois chiffres au moins)

Nous pouvons scinder l'expression $N = c_n \times 10^n + \cdots + c_1 \times 10 + c_0$ en une somme de deux nombres : $N = (c_n \times 10^n + \cdots + c_3 \times 10^3 + c_2 \times 10^2) + (c_1 \times 10 + c_0)$. Soit :

$N = 100(c_n \times 10^{n-2} + \cdots + c_3 \times 10 + c_2) + (c_1 \times 10 + c_0)$

- L'entier $a = c_n \times 10^{n-2} + \cdots + c_3 \times 10 + c_2$ représente le nombre de centaines de N.
- L'entier $b = c_1 \times 10 + c_0$ s'écrit en numération décimale $b = \overline{c_1 c_0}$, à l'aide des deux derniers chiffres (dizaines et unités) de l'écriture de N. Il vérifie la condition $0 \leq b < 100$ puisque deux chiffres significatifs au plus suffisent à l'écrire. (La condition $0 \leq b < 100$ apparaît ici).
- Nous avons la relation : $N = 100a + b$

D'après les résultats de la première question, N est divisible par 25 si et seulement si b est divisible par 25.

Nous pouvons énoncer le critère de divisibilité par 25 :

Un entier est divisible par 25 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25.

NB. Ce nombre b doit figurer dans la liste des quatre nombres : $\{00,\ 25,\ 50,\ 75\}$.