www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Suites Numériques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE ET SENS DE VARIATION

CORRECTION

1. Étudions le sens de variation de la suite (U_n):

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{U_n + 1}{2U_n + 3}\right) - \left(\frac{U_{n-1} + 1}{2U_{n-1} + 3}\right)$$

$$= \frac{U_n - U_{n-1}}{(2U_n + 3)(2U_{n-1} + 3)},$$ avec: $U_n > 0$ d'après l'énoncé.

Or: $2U_n + 3 > 0$ et $2U_{n-1} + 3 > 0$ car pour tout nombre n de IN, $U_n > 0$.

Dans ces conditions, $(2U_n + 3)(2U_{n-1} + 3) > 0$ et donc le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de $U_n - U_{n-1}$ qui dépend du signe de $U_{n-1} - U_{n-2}$ qui dépend du signe de ... qui dépend du signe de $U_1 - U_0 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} > 0$. (car: $U_1 = \frac{1}{3}$)

Ainsi: $U_{n+1} - U_n > 0$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur IN.

2. Étudions le sens de variation de la suite (U_n):

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = (\sqrt{1 + 2U_n} - 1) - (\sqrt{1 + 2U_{n-1}} - 1)$$

$$= \sqrt{1 + 2U_n} - \sqrt{1 + 2U_{n-1}}, \text{ avec: } \quad U_n > 0 \text{ d'après l'énoncé.}$$

Supposons $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ et vérifions si cela est vrai.

$$U_{n+1} - U_n \leqslant 0 \iff \sqrt{1 + 2U_n} \leqslant \sqrt{1 + 2U_{n-1}}$$

$$\iff 1 + 2U_n \leqslant 1 + 2U_{n-1} \quad \text{(en élevant au carré)}$$

$$\iff 2U_n \leqslant 2U_{n-1}$$

$$\iff U_n - U_{n-1} \leqslant 0.$$

Donc le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de $U_n - U_{n-1}$ qui dépend du signe de $U_{n-1} - U_{n-2}$ qui dépend du signe de ... qui dépend du signe de la différence de $U_1 - U_0 = 2 - 4 = -2 < 0$. (car: $U_1 = 2$)

Dans ces conditions, **oui** nous avons bien $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ car $U_{n+1} - U_n < 0$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n < 0$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. Étudions le sens de variation de la suite (U_n):

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{U_n}{1+3U_n}\right) - U_n$$

$$= \frac{-3U_n^2}{1+3U_n}$$, avec: $U_n > 0$ d'après l'énoncé.

Or: $1 + 3U_n > 0$ et $-3U_n^2 < 0$ car pour tout nombre n de IN, $U_n > 0$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n < 0$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur IN.