

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Suites Numériques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SUITES DÉFINIES EXPLICITEMENT ET SENS DE VARIATION

CORRECTION

1. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) , avec $U_n = 3n - 6$ ($n \in \mathbb{N}$):

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= [3(n+1) - 6] - [3n - 6] \\ &= 3n + 3 - 6 - 3n + 6. \end{aligned}$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = 3 > 0$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: **strictement croissante sur \mathbb{N} .**

2. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) , avec $U_n = -n^2 + 12$ ($n \in \mathbb{N}$):

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= [-(n+1)^2 + 12] - [-n^2 + 12] \\ &= -n^2 - 1 - 2n + 12 + n^2 - 12. \end{aligned}$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = -(1 + 2n) < 0$ car $n \in \mathbb{N}$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: **strictement décroissante sur \mathbb{N} .**

3. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) , avec $U_n = \sqrt{3n+7}$ ($n \in \mathbb{N}$): 2

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned}U_{n+1} - U_n &= [\sqrt{3(n+1)+7}] - [\sqrt{3n+7}] \\&= \frac{([\sqrt{3(n+1)+7}] - [\sqrt{3n+7}]) \times ([\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}])}{[\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}]} \\&= \frac{(3(n+1)+7) - (3n+7)}{[\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}]} \quad ((a-b) \times (a+b) = a^2 - b^2) \\&= \frac{3n+3+7-3n-7}{[\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}]}, \quad \text{avec: } \begin{cases} \bullet [\sqrt{3(n+1)+7}] > 0 \\ \bullet \sqrt{3n+7} > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = \frac{3}{[\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}]} > 0$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur \mathbb{N} .

4. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) , avec $U_n = \frac{n+1}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$):

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned}U_{n+1} - U_n &= \left[\frac{(n+1)+1}{(n+1)+2} \right] - \left[\frac{n+1}{n+2} \right] \\&= \left[\frac{n+2}{n+3} \right] - \left[\frac{n+1}{n+2} \right].\end{aligned}$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$ car $n \in \mathbb{N}$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur \mathbb{N} .

5. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) , avec $U_n = \frac{3^n}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$):

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$, sachant que $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \left[\frac{3^{(n+1)}}{(n+1)} \right] - \left[\frac{3^n}{n} \right] \\ &= \frac{3 \times 3^n}{n+1} - \frac{3^n}{n} \\ &= \frac{3n3^n - n3^n - 3^n}{(n+1) \times n}, \text{ avec: } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = \frac{3^n(2n-1)}{(n+1) \times n} > 0$ car $n \geq 1$, et donc $U_{n+1} > U_n$.
($2n-1 \geq 1$)

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur \mathbb{N}^* .

6. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) , avec $U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$):

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$, sachant que $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} \right] - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right] \\ &= \frac{2}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \times n \times (n+2) - (n+1) \times n - (n+1) \times (n+2)}{n \times (n+1) \times (n+2)}$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = \frac{-2}{n \times (n+1) \times (n+2)} < 0$ car $n \geq 1$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur \mathbb{N}^* .