

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Suites Numériques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SUITE DÉCROISSANTE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE

CORRECTION

1. Calculons U_1 , U_2 et U_3 :

$$\bullet U_1 = \frac{U_0}{2} + \frac{1}{U_0} \text{ cad } U_1 = \frac{3}{2},$$

$$\bullet U_2 = \frac{U_1}{2} + \frac{1}{U_1} \text{ cad } U_2 = \frac{17}{12},$$

$$\bullet U_3 = \frac{U_2}{2} + \frac{1}{U_2} \text{ cad } U_3 = \frac{577}{408}.$$

2. Montrons que la suite (U_n) est décroissante sur \mathbb{N}^* :

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{U_n}{2} + \frac{1}{U_n} \right) - U_n$$

$$= \frac{-U_n^2 + 2}{2U_n}, \text{ avec: } U_n > 0 \text{ d'après l'énoncé.}$$

Or: $2U_n > 0$ car pour tout nombre n de \mathbb{N} , $U_n > 0$.

Dans ces conditions, le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de $-U_n^2 + 2$.

D'où la suite (U_n) est décroissante ssi: $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \text{ ssi } -U_n^2 + 2 \leq 0 \text{ cad ssi } U_n \geq \sqrt{2}.$$

$$\text{Or: } U_0 = 1 < \sqrt{2}, U_1 > \sqrt{2}, U_2 > \sqrt{2} \text{ et } U_3 > \sqrt{2}.$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n \leq 0$ cad $U_{n+1} \leq U_n$ uniquement à partir du rang $n = 1$.

La suite (U_n) est donc: décroissante pour tout entier naturel $n \geq 1$,
c'est-à-dire décroissante sur \mathbb{N}^* .