Maths Complémentaires Terminale

Suites Numériques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SUITE ET FONCTION

CORRECTION

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geqslant 0$ et $\frac{1}{4} > 0$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + \frac{1}{4} > 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x \geqslant 0$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - x = x^2 + \frac{1}{4} - x$ cad $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

3. Déduisons-en que la suite (U_n) est croissante avec $U_n > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$.

Or, d'après la question précédente: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x \geqslant 0$.

D'où, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $f(U_n) - U_n \geq 0$ cad $\boldsymbol{f(U_n) \geq U_n}$.

$f(U_n) \geq U_n$ revient à dire que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} \geq U_n$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: la suite (U_n) est croissante.