

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Suites Numériques



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# SENS DE VARIATION ET SUITES À TERMES STRICTEMENT POSITIFS

## CORRECTION

1. Calculons  $U_0$  et  $U_1$ :

a.  $U_0 = \frac{0}{0+2}$  cad  $U_0 = 0$  et  $U_1 = \frac{1}{1+2}$  cad  $U_1 = \frac{1}{3}$ .

b.  $U_0 = \frac{2 \times 0}{0+3}$  cad  $U_0 = 0$  et  $U_1 = \frac{2 \times 1}{1+3}$  cad  $U_1 = \frac{1}{2}$ .

c.  $U_0 = 3 + 0,5^0$  cad  $U_0 = 3$  et  $U_1 = 3 + 0,5^1$  cad  $U_1 = 3,5$ .

d.  $U_0 = \frac{0}{3^0}$  cad  $U_0 = 0$  et  $U_1 = \frac{1}{3^1}$  cad  $U_1 = \frac{1}{3}$ .

e.  $U_0 = 2 + \frac{1}{0+3}$  cad  $U_0 = \frac{7}{3}$  et  $U_1 = 2 + \frac{1}{1+3}$  cad  $U_1 = \frac{9}{4}$ .

2. Conjecturons le sens de variation de chaque suite:

a. Comme  $U_0 = 0$  et  $U_1 = \frac{1}{3}$ , on pourrait, a priori, penser que la suite  $(U_n)$  est croissante.

b. Comme  $U_0 = 0$  et  $U_1 = \frac{1}{2}$ , on pourrait, a priori, penser que la suite  $(U_n)$  est croissante.

c. Comme  $U_0 = 3$  et  $U_1 = 3,5$ , on pourrait, a priori, penser que la suite  $(U_n)$  est croissante.

d. Comme  $U_0 = 0$  et  $U_1 = \frac{1}{3}$ , on pourrait, a priori, penser que la suite  $(U_n)$  est croissante.

e. Comme  $U_0 = \frac{7}{3}$  et  $U_1 = \frac{9}{4}$ , on pourrait, a priori, penser que la suite  $(U_n)$  est décroissante.

3. Déterminons le sens de variation exact de chaque suite:

a. Pour tout entier naturel  $n$ , nous savons que:  $U_n = \frac{n}{n+2}$ .

Dans ces conditions, pour tout entier naturel  $n$ :

$$\begin{aligned}\frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\frac{(n+1)}{(n+1)+2}}{\frac{n}{n+2}} \\ &= \frac{(n+1) \times (n+2)}{(n+3) \times n} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n}.\end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$  car:  $n^2 + 3n + 2 > n^2 + 3n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Comme  $(U_n)$  est une suite à termes strictement positifs et que  $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ ,

nous pouvons affirmer que: la suite  $(U_n)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{N}$ .

$$(U_{n+1} - U_n > 0)$$

b. Pour tout entier naturel  $n$ , nous savons que:  $U_n = \frac{2n}{n+3}$ .

Dans ces conditions, pour tout entier naturel  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\frac{2(n+1)}{(n+1)+3}}{\frac{2n}{n+3}} \\ &= \frac{2(n+1) \times (n+3)}{(n+4) \times 2n} \\ &= \frac{2n^2 + 8n + 6}{2n^2 + 8n}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$  car:  $2n^2 + 8n + 6 > 2n^2 + 8n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Comme  $(U_n)$  est une suite à termes strictement positifs et que  $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ ,

nous pouvons affirmer que: la suite  $(U_n)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{N}$ .

$$(U_{n+1} - U_n > 0)$$

c. Pour tout entier naturel  $n$ , nous savons que:  $U_n = 3 + 0,5^n$ .

Dans ces conditions, pour tout entier naturel  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{3 + 0,5^{(n+1)}}{3 + 0,5^n} \\ &= \frac{3 + 0,5 \times 0,5^n}{3 + 0,5^n}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

En effet, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :  $3 + 0,5 \times 0,5^n < 3 + 0,5^n$ .

(car:  $0,5 < 1$ )

Comme  $(u_n)$  est une suite à termes strictement positifs et que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ,

à partir de tout entier naturel  $n \geq 1$ , nous pouvons affirmer que: la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante à partir de  $n \geq 1$ . ( $u_{n+1} - u_n < 0$ )

d. Pour tout entier naturel  $n$ , nous savons que:  $u_n = \frac{n}{3^n}$ .

Dans ces conditions, pour tout entier naturel  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)}{3^{(n+1)}}}{\frac{n}{3^n}} \\ &= \frac{3^n \times (n+1)}{3^{(n+1)} \times n} \\ &= \frac{n+1}{3n}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

En effet, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :  $n+1 < 3n$  cad  $2n-1 > 0$ .

(car:  $n > \frac{1}{2}$ )

Comme  $(U_n)$  est une suite à termes strictement positifs et que  $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ ,  
à partir de tout entier naturel  $n \geq 1$ , nous pouvons affirmer que: **la suite  $(U_n)$  est strictement décroissante à partir de  $n \geq 1$ . ( $U_{n+1} - U_n < 0$ )**

e. Pour tout entier naturel  $n$ , nous savons que:  $U_n = 2 + \frac{1}{n+3}$ .

Dans ces conditions, pour tout entier naturel  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{2 + \frac{1}{(n+1)+3}}{2 + \frac{1}{n+3}} \\ &= \frac{\frac{2(n+4)+1}{(n+4)}}{\frac{2(n+3)+1}{(n+3)}} \\ &= \frac{(2n+9)(n+3)}{(n+4)(2n+7)} \\ &= \frac{2n^2 + 15n + 27}{2n^2 + 15n + 28}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$  car:  $2n^2 + 15n + 27 < 2n^2 + 15n + 28$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(car:  $27 < 28$ )

Comme  $(U_n)$  est une suite à termes strictement positifs et que  $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ ,

nous pouvons affirmer que: **la suite  $(U_n)$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{N}$ .**

$$(U_{n+1} - U_n < 0)$$