Maths
Complémentaires
Terminale

Suites Géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE SUITE À PARTIR D'UNE SUITE... 6

CORRECTION

1. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique:

Nous savons que pour tout entier naturel n:

- $U_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{3n}\right) \times U_n$
- $V_n = \dfrac{U_n}{n}$.

Dans ces conditions: $U_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{3n}\right) U_n \iff \dfrac{U_{n+1}}{(n+1)} = \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{3n}\right) U_n}{(n+1)}$

$$\iff V_{n+1} = \frac{U_n}{3n}$$

$$\iff V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n.$$

Ainsi: la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $V_1 = \dfrac{U_1}{1} = \dfrac{1}{3}$.

1. b. Donnons l'expression de V_n en fonction de n:

Comme (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme

$V_1 = \frac{1}{3}$: $V_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. $(V_n = V_1 \times q^{(n-1)})$

1. c. Déduisons-en U_n pour tout entier naturel $n \geq 1$:

Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $V_n = \frac{U_n}{n}$ <=> $U_n = n \times V_n$.

D'où: $U_n = \frac{1}{3} n \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}$ ou $U_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminons le sens de variation de la suite (U_n):

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)} - n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{(n+1)}{3} - n\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{-2n+1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Comme $U_{n+1} - U_n < 0$ (car $n \geq 1$): la suite (U_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.