Maths Complémentaires Terminale

Suites Géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE SUITE À PARTIR D'UNE SUITE... 2

CORRECTION

1. Montrons que (V_n) est une suite géométrique:

Nous savons que pour tout entier naturel n:

- $U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n + 2$, avec $U_0 = a > 7$.
- $V_n = U_n - \frac{8}{3}$

Dans ces conditions: $U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n + 2 \iff U_{n+1} - \frac{8}{3} = \left(\frac{1}{4} U_n + 2\right) - \frac{8}{3}$

$$\iff V_{n+1} = \frac{1}{4}\left(U_n - \frac{8}{3}\right)$$

$$\iff V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n.$$

Ainsi: la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - \frac{8}{3} = a - \frac{8}{3}$.

2. Déduisons-en V_n et U_n en fonction de n:

a. En ce qui concerne (V_n):

Comme (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme

$V_0 = a - \frac{8}{3}$: $V_n = \left(a - \frac{8}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n, n \in \mathbb{N}$.

b. En ce qui concerne (U_n):

Pour tout entier naturel n: $V_n = U_n - \frac{8}{3} \iff U_n = V_n + \frac{8}{3}$.

D'où: $U_n = \left(a - \frac{8}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}, n \in \mathbb{N}$.

3. Les suites (V_n) et (U_n) sont-elles convergentes ? divergentes ?

a. En ce qui concerne (V_n):

Pour tout entier naturel n: $V_n = \left(a - \frac{8}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Or: $a > 7$, et donc $V_0 = a - \frac{8}{3} > \frac{13}{3} > 0$.

Comme $V_0 > 0$ et $q = \frac{1}{4} \in \left]0, 1\right[$, d'après le cours nous pouvons affirmer

que: **la suite (V_n) est convergente**.

b. En ce qui concerne (U_n):

Pour tout entier naturel n: $U_n = \left(a - \frac{8}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(a - \frac{8}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$

$$= \lim_{n \to +\infty} V_n + \lim_{n \to +\infty} \frac{8}{3}.$$

Or: $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ car $\frac{1}{4} \in \,]\, 0, 1\, [$, et $\lim_{n \to +\infty} \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$.

D'où: $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{8}{3}$ et **donc la suite (U_n) est convergente**.