Maths Complémentaires Terminale

Suites Arithmétiques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SOMME ET SENS DE VARIATION

CORRECTION

1. Exprimons U_n en fonction de n et r :

a. $U_{n+1} = U_n + 10, \ U_0 = 1$:

Ici: $U_0 = 1$ et $r = 10$.

D'où: $U_n = 1 + 10n$.

b. $U_{n+1} = U_n - 7, \ U_0 = 10$:

Ici: $U_0 = 10$ et $r = -7$.

D'où: $U_n = 10 - 7n$.

c. $U_n = U_{n-1} + 3, \ U_0 = 1$:

Ici: $U_0 = 1$ et $r = 3$.

D'où: $U_n = 1 + 3n$.

d. $U_n = U_{n-1} - 4, \ U_2 = 7$:

Ici: $U_2 = 7$ et $r = -4$.

D'où: $U_n = 7 - 4 \times (n - 2)$ cad $U_n = 15 - 4n$.

e. $U_n = U_{n-1} + 1$, $U_3 = 6$:

Ici: $U_3 = 6$ et $r = 1$.

D'où: $U_n = 6 + 1 \times (n - 3)$ cad $U_n = 3 + n$.

f. $U_{n+1} = U_n$, $U_1 = 3$:

Ici: $U_1 = 3$ et $r = 0$.

D'où: $U_n = 3 + 0 \times (n - 1)$ cad $U_n = 3$.

2. Calculons les n premiers termes:

D'après le cours, soit une suite arithmétique (U_n) de raison r:

• si U_0 est le premier terme, pour tout entier naturel non nul n:

$$U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n + 1) \times \left[\frac{U_0 - U_n}{2}\right].$$

• pour tous entiers naturels n et p:

$$U_p + U_{p+1} + ... + U_n = \frac{(n - p + 1) \times (U_p + U_n)}{2}.$$

a. $U_{n+1} = U_n + 10$, $U_0 = 1$:

Ici: $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n + 1) \times \left[\frac{1 + U_n}{2}\right]$

$$= (n + 1) \times \left[\frac{1 + (1 + 10n)}{2}\right], \text{ car } U_n = 1 + 10n.$$

D'où: $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n+1) \times (5n+1)$.

b. $U_{n+1} = U_n - 7$, $U_0 = 10$:

Ici: $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n+1) \times \left[\dfrac{10 + U_n}{2}\right]$

$= (n+1) \times \left[\dfrac{10 + (10 - 7n)}{2}\right]$, car $U_n = 10 - 7n$.

D'où: $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n+1) \times \left(-\dfrac{7n}{2} + 10\right)$.

c. $U_n = U_{n-1} + 3$, $U_0 = 1$:

Ici: $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n+1) \times \left[\dfrac{1 + U_n}{2}\right]$

$= (n+1) \times \left[\dfrac{1 + (1 + 3n)}{2}\right]$, car: $U_n = 1 + 3n$.

D'où: $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n+1) \times \left(\dfrac{3n}{2} + 1\right)$.

d. $U_n = U_{n-1} - 4$, $U_2 = 7$:

Ici: $U_2 + U_3 + U_4 + ... + U_n = (n - 2 + 1) \times \left[\dfrac{U_2 + U_n}{2}\right]$

$= (n-1) \times \left[\dfrac{7 + (15 - 4n)}{2}\right]$, car:
- $U_2 = 7$
- $U_n = 15 - 4n$.

D'où: $U_2 + U_3 + U_4 + ... + U_n = (n-1) \times (11 - 2n)$.

e. $U_n = U_{n-1} + 1$, $U_3 = 6$:

Ici: $U_3 + U_4 + U_5 + ... + U_n = (n - 3 + 1) \times \left[\frac{U_3 + U_n}{2}\right]$

$= (n - 2) \times \left[\frac{6 + (3 + n)}{2}\right]$, car: • $U_3 = 6$

• $U_n = 3 + n$.

D'où: $U_3 + U_4 + U_5 + ... + U_n = (n - 2) \times \left(\frac{9 + n}{2}\right)$.

f. $U_{n+1} = U_n$, $U_1 = 3$:

Ici: $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = (n - 1 + 1) \times \left[\frac{U_1 + U_n}{2}\right]$

$= n \times \left[\frac{3 + (3)}{2}\right]$, car $U_1 = 3$ et $U_n = 3$.

D'où: $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = 3n$.

3. Déterminons le sens de variation:

D'après le cours, soit une suite arithmétique (U_n) définie sur IN et de raison r:

- **si $r > 0$: (U_n) est croissante sur IN**
- **si $r < 0$: (U_n) est décroissante sur IN**
- **si $r = 0$: (U_n) est constante sur IN.**

a. $U_{n+1} = U_n + 10$, $U_0 = 1$:

Ici: (U_n) est une suite arithmétique **définie sur IN** et de raison **$r = 10$**.

Comme $r = 10 > 0$: (U_n) est croissante sur IN.

b. $U_{n+1} = U_n - 7,\ U_0 = 10$:

Ici: (U_n) est une suite arithmétique **définie sur IN** et de raison **r = -7**.

Comme r = -7 < 0: **(U_n) est décroissante sur IN.**

c. $U_n = U_{n-1} + 3,\ U_0 = 1$:

Ici: (U_n) est une suite arithmétique **définie sur IN** et de raison **r = 3**.

Comme r = 3 > 0: **(U_n) est croissante sur IN.**

d. $U_n = U_{n-1} - 4,\ U_2 = 7$:

Ici: (U_n) est une suite arithmétique **définie sur IN** et de raison **r = -4**.

Comme r = -4 < 0: **(U_n) est décroissante sur IN.**

e. $U_n = U_{n-1} + 1,\ U_3 = 6$:

Ici: (U_n) est une suite arithmétique **définie sur IN** et de raison **r = 1**.

Comme r = 1 > 0: **(U_n) est croissante sur IN.**

f. $U_{n+1} = U_n,\ U_1 = 3$:

Ici: (U_n) est une suite arithmétique **définie sur IN** et de raison **r = 0**.

Comme r = 0: **(U_n) est constante ou stationnaire sur IN.**