Maths Complémentaires Terminale

Suites Arithmétiques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SOMME DES n PREMIERS CARRÉS

CORRECTION

1. Rappelons la formule permettant le calcul de S_1^n:

D'après le cours, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Calculons $S_3^{n+1} - S_3^n$:

$S_3^{n+1} - S_3^n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 - (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3)$

$= (n+1)^3$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Ainsi: $S_3^{n+1} - S_3^n = (n+1)^3$.

3. Montrons que $S_3^{n+1} - S_3^n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$:

Nous savons que: $S_3^{n+1} - S_3^n = (n+1)^3$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Or: $(n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2$

$= (n+1)(n^2 + 1 + 2n)$

$= n^3 + n + 2n^2 + n^2 + 1 + 2n$

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Ainsi, nous avons bien: $S_3^{n+1} - S_3^n = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

4. Déduisons-en que $S_3^{n+1} = S_3^n + 3\ S_2^n + 3\ S_1^n + n + 1$:

Nous venons de montrer que: $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

D'où nous pouvons écrire: $n^3 = (n - 1)^3 + 3\ (n - 1)^2 + 3\ (n - 1) + 1$

$$(n - 1)^3 = (n - 2)^3 + 3\ (n - 2)^2 + 3\ (n - 2) + 1$$

$$(n - 2)^3 = (n - 3)^3 + 3\ (n - 3)^2 + 3\ (n - 3) + 1$$

$$\vdots$$

$$1^3 = 0^3 + 3\ (0)^2 + 3\ (0) + 1.$$

Dans ces conditions, en additionnant membre à membre les égalités précédentes, nous obtenons:

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + n^3 + (n - 1)^3 + \ldots + 1^3 = {} & [\ n^3 + (n - 1)^3 + (n - 2)^3 + \ldots + 1^3 + 0^3\ ] \\ & + 3 \times [\ n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \ldots + 1^2 + 0^2\ ] \\ & + 3 \times [\ n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 1 + 0\ ] \\ & + n \times 1 + 1, \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 1.\end{aligned}$$

Ainsi nous avons: $S_3^{n+1} = S_3^n + 3 \times S_2^n + 3 \times S_1^n + (n + 1).$

5. Que vaut alors S_2^n ?

Nous savons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $S_3^{n+1} = S_3^n + 3\ S_2^n + 3\ S_1^n + (n + 1).$

D'où: $S_2^n = \dfrac{1}{3}\left(S_3^{n+1} - S_3^n - 3\ S_1^2 - n - 1\right)$

$$= \frac{1}{3}\left((n + 1)^3 - \frac{3n\ (n + 1)}{2} - n - 1\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{, pour tout entier naturel } n \geq 1.$$

Au total: $S_2^n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.