

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UN PETIT CAFÉ !

CORRECTION

1. Déterminons le pourcentage de réduction:

Soit x le pourcentage de réduction dont bénéficie Antoine.

x est tel que: $60 \text{ €} = (1 - x) \times (150 \times 0,60 \text{ €})$

$$\Leftrightarrow 60 = (1 - x) \times 90$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = 1 - x \text{ cad: } x = \frac{1}{3} \approx 33,33\%.$$

Ainsi le pourcentage de réduction proposé à Antoine est de: **33,33%**.

2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,9 U_n + 24000$:

• D'après l'énoncé, le 1^{er} janvier 2017 il y a 60000 utilisateurs.

D'où: $U_0 = 60000$ utilisateurs.

• De plus, chaque mois, on note que:

- 10% des propriétaires cessent d'utiliser la machine à café,
- et, 24000 nouveaux utilisateurs débarquent.

Soient: • U_{n+1} , le nombre d'utilisateurs de cette machine à café " $n+1$ " mois après le 1^{er} janvier 2017,

- U_n , le nombre d'utilisateurs de cette machine à café " n " mois après le 1^{er} janvier 2017.

Pour tout entier naturel n , le nombre d'utilisateurs de cette machine à café " $n+1$ " mois après le 1^{er} janvier 2017 est égal à celui U_n diminué de 10% et augmenté de 24000 nouveaux utilisateurs.

Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 10\% \times U_n + 24000 \quad \text{cad: } U_{n+1} = 0,9 \times U_n + 24000.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,9 \times U_n + 24000$.

2. b. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$$V_n = U_n - 240000 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 240000, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,9 \times U_n + 24000) - 240000 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 240000 \Rightarrow V_0 = 60000 - 240000 = -180000$$

$$\text{et } U_n = V_n + 240000.$$

$$\text{Alors: } (1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (0,9 [V_n + 240000] + 24000) - 240000$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 0,9 V_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = -180000$.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,9 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (0,9)^n$ cad: $V_n = -180\,000 \times (0,9)^n$.

3. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_n = -180\,000 \times (0,9)^n + 240\,000$:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: * $V_n = -180\,000 \times (0,9)^n$

$$* U_n = V_n + 240\,000.$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -180\,000 \times (0,9)^n + 240\,000$.

4. Déterminons le nombre de mois demandés:

Nous allons déterminer " n " $\in \mathbb{N}$ tel que: $U_n > 230\,000$.

$$U_n > 230\,000 \iff -180\,000 \times (0,9)^n + 240\,000 > 230\,000$$

$$\iff (0,9)^n < \frac{1}{18}$$

$$\iff n \cdot \ln(0,9) < -\ln(18)$$

$$\iff n > \frac{-\ln(18)}{\ln(0,9)}, \text{ car: } 0,9 \in]0; 1[$$

$$\Rightarrow n > 28 \text{ mois, car } n \text{ est un entier naturel.}$$

En conclusion: au bout de 28 mois (après le 1^{er} janvier 2017), le nombre d'utilisateurs de la machine à café dépassera pour la première fois 230 000.

5. Que pensons-nous de cette affirmation ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -180\,000 \times (0,9)^n + 240\,000$$

$$= 240\,000 \text{ utilisateurs} \quad \text{car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,9)^n = 0, \quad \text{car: } 0,9 \in]0; 1[. \quad 4$$

Cela signifie, qu'au bout de n mois (" n " très grand), le nombre d'utilisateurs de la machine à café se stabilisera autour de 240 000.

Donc jamais, on dépassera 240 000 utilisateurs.

Au total, cette affirmation est donc: fausse !