

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons U_1 et U_2 :

Il s'agit de calculer U_1 et U_2 .

- $U_1 = 0,8 U_0 + 18 \Leftrightarrow U_1 = 0,8 \times 65 + 18 \Rightarrow U_1 = 70.$
- $U_2 = 0,8 U_1 + 18 \Leftrightarrow U_2 = 0,8 \times 70 + 18 \Rightarrow U_2 = 74.$

Ainsi, les valeurs respectives de U_1 et U_2 sont: $U_1 = 70$ et $U_2 = 74$.

2. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$$\begin{aligned} V_n = U_n - 90 &\Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 90 \\ &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,8 U_n + 18) - 90 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 90 \Rightarrow V_0 = 65 - 90 = -25 \text{ et } U_n = V_n + 90.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,8 [V_n + 90] + 18) - 90 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 0,8 V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = -25$.

2. b. Démontrons que, pour tout entier naturel n , $U_n = 90 - 25 \times 0,8^n$:

Nous savons que: $* V_n = -25 \times (0,8)^n$ (d'après le cours)

$$* U_n = V_n + 90.$$

D'où: $U_n = -25 \times (0,8)^n + 90$ ou: $U_n = 90 - 25 \times (0,8)^n$.

3. a. Recopions et complétons l'algorithme pour atteindre l'objectif demandé:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```

u ← 65

n ← 0

Tant que u < 85
    | n ← n + 1
    | u ← 0,8 x u + 18
Fin Tant que
  
```

3. b. Déterminons la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme:

Pour répondre à cette question, nous allons dresser un tableau:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n	65	70	74	77,2	79,8	81,8	83,4	84,8	85,8

Nous nous arrêtons quand $n = 8$ car c'est à partir de cette valeur entière-là que $U_n \geq 85$.

3. c. Résolvons l'inéquation $U_n \geq 85$:

$$U_n \geq 85 \Leftrightarrow 90 - 25 \times (0,8)^n \geq 85$$

$$\Leftrightarrow 25 \times (0,8)^n \leq 5$$

$$\Leftrightarrow (0,8)^n \leq \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,8) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(5)}{\ln(0,8)}, \text{ car: } 0,8 \in]0; 1[, \text{ et donc: } \ln(0,8) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 8, \text{ car } n \text{ est un entier naturel.}$$

En conclusion: nous retrouvons bien par le calcul le résultat de la question précédente 3. b.

4. a. Justifions que la suite (U_n) permet cette modélisation:

- D'après l'énoncé, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement en juillet 2017.

D'où: $U_0 = 65$ particuliers.

- De plus, chaque mois, les souscriptions évoluent comme suit:
 - d'un mois à l'autre, environ 20% des abonnements sont résiliés,
 - et, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

Soient: • U_{n+1} , le nombre d'abonnés au panier bio le $(n+1)$ ième mois qui suit juillet 2017,

- U_n , le nombre d'abonnés au panier bio le (n) ième mois qui suit juillet 2017.

Pour tout entier naturel n , le nombre d'abonnés le $(n+1)$ ème mois qui suit juillet 2017 est égal à celui U_n diminué de 20% et augmenté de 18 abonnements.

Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 20\% U_n + 18 \Rightarrow U_{n+1} = 0,8 U_n + 18.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,8 U_n + 18$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et donc: la suite (U_n) permet bien la modélisation du nombre d'abonnés au panier bio le n -ième mois qui suit juillet 2017.

4. b. La recette mensuelle va-t-elle dépasser 4 420 € en 2018:

La recette mensuelle U_n , le mois " n ", nous est donnée par la formule:

$$R = \text{prix d'un abonnement} \times \text{nombre d'abonnés} \quad \text{cad ici: } R = 52 \text{ €} \times U_n.$$

La question est de savoir à partir de quel mois " n ": $R > 4420 \text{ €}$?

$$R > 4420 \text{ €} \Leftrightarrow 52 \times (90 - 25 \times (0,8)^n) > 4420$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,8) < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow n \geq 8, \text{ d'après la question 3. c.}$$

En conclusion: oui, 8 mois après juillet 2017, soit à partir du mois de mars 2018, la société aura une recette mensuelle supérieure à 4 420 €.

4. c. Vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société ?

En $+\infty$, comme $(0,8)^n$ tend vers 0: la recette mensuelle de la société tendra vers $52 \text{ €} \times 90 = 4680 \text{ euros}$.