

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SYSTÈME DE FILTRATION

CORRECTION

1. Vérifions que $a_2 = 1878,8$ kg:

Il s'agit de calculer a_2 .

$$a_2 = (1 + 2\%) a_1 - 100, \text{ avec: } a_1 = (1 + 2\%) a_0 - 100.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } a_2 &= (1 + 2\%) \times ((1 + 2\%) a_0 - 100) - 100 \\ &= (1,02)^2 \times 2000 - 202 \\ \Rightarrow a_2 &= 1878,8 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Ainsi, la masse d'algues dans l'étang après deux jours de fonctionnement du système de filtration est bien de: $1878,8$ kg.

2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 1,02 a_n - 100$:

- D'après l'énoncé, la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2000 kg.

$$\text{D'où: } a_0 = 2000 \text{ kg.}$$

- De plus, chaque jour, la masse d'algues évolue comme suit:
 - en journée, elle augmente de 2% ,
 - et, elle diminue de 100 kg grâce à la mise en place pendant une heure du système de filtration.

- Soient :
- a_{n+1} , la masse d'algues dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant $(n+1)$ jours,
 - a_n , la masse d'algues dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant (n) jours.

Pour tout entier naturel n , la masse d'algues a_{n+1} dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant $(n+1)$ jours est égale à celle a_n augmentée de 2% et diminuée de 100 kg.

Pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = a_n + 2\% a_n - 100 \Rightarrow a_{n+1} = 1,02 a_n - 100.$$

Au total, nous avons bien: $a_{n+1} = 1,02 a_n - 100$.

2. b. Montrons que (b_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme b_0 que l'on précisera:

$$b_n = a_n - 5000 \Leftrightarrow b_{n+1} = a_{n+1} - 5000$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = (1,02 a_n - 100) - 5000 \quad (1).$$

Or: $b_0 = a_0 - 5000 \Rightarrow b_0 = 2000 - 5000 = -3000$ et $a_n = b_n + 5000$.

Ainsi: $(1) \Leftrightarrow b_{n+1} = (1,02 [b_n + 5000] - 100) - 5000$

$$\Rightarrow b_{n+1} = 1,02 b_n.$$

Par conséquent, (b_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $b_0 = -3000$ kg.

2. c. c1. Déduisons-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de b_n en fonction de n :

Comme $b_{n+1} = 1,02 b_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$b_n = b_0 \times (1,02)^n, \text{ avec: } b_0 = -3000.$$

2. c. c2. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5000 - 3000 \times 1,02^n$:

Nous savons que: * $b_n = -3000 \times (1,02)^n$

* $a_n = b_n + 5000.$

D'où: $a_n = -3000 \times (1,02)^n + 5000$ ou: $a_n = 5000 - 3000 \times (1,02)^n.$

2. d. Déterminons la limite de la suite (a_n) et justifions que les algues finissent par disparaître:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5000 - 3000 \times (1,02)^n$$

$$= -\infty \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1,02)^n = +\infty, \text{ car: } 1,02 > 1.$$

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ revient à dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ car avoir une masse d'algues

négative dans l'étang n'a aucune signification !!!

Ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$

En conclusion: au bout de n jours (" n " très grand), la masse d'algues dans l'étang deviendra nulle.

En d'autres termes, au bout de n jours (" n " très grand), les algues finissent par disparaître.

3. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

$$N \leftarrow 0$$

$$A \leftarrow 2000$$

Tant que $A \geq 0$

$$A \leftarrow 1,02 \times A - 100$$

$$N \leftarrow N + 1$$

Fin Tant que

Afficher N

3. b. Déterminons le résultat renvoyé par l'algorithme:

L'algorithme renvoie la valeur: $N = 26$ car: $a_{25} \approx 78,2$ et $a_{26} \approx -20,15$.

4. a. Résolvons l'inéquation $5000 - 3000 \times (1,02)^n \leq 0$:

$$5000 - 3000 \times (1,02)^n \leq 0 \Leftrightarrow (1,02)^n \geq \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(1,02) \geq \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1,02)}$$

$\Rightarrow n \geq 26$, car n est un entier naturel.

En conclusion, l'inéquation $5000 - 3000 \times (1,02)^n \leq 0$ a pour solution: $n \geq 26$.

4. b. Interprétons le résultat obtenu:

Au bout de 26 jours exactement, les algues finiront par disparaître dans l'étang.

On retrouve ainsi le résultat trouvé à la question 3. b.