Maths Complémentaires Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LES PHOTOCOPIEURS

CORRECTION

1. a. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1,14\ U_n - 7$:

• D'après l'énoncé, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits en 2017.

D'où: $U_0 = 120$ contrats souscrits.

• De plus, chaque année, le directeur de cette société note que:

- 14% de contrats supplémentaires sont souscrits,
- et, 7 contrats sont résiliés.

Soient: • U_{n+1}, le nombre de contrats souscrits l'année 2017 + (n + 1),

• U_n, le nombre de contrats souscrits l'année 2017 + (n).

Pour tout entier naturel n, le nombre de contrats souscrits l'année 2017 + (n + 1) est égal à celui U_n augmenté de 14% et diminué de 7 contrats.

Pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n + 14\%\ U_n - 7 \Rightarrow U_{n+1} = 1,14\ U_n - 7.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 1,14\ U_n - 7$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. b. Donnons une estimation du nombre de contrats d'entretien en 2018:

Pour répondre à cette question, il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 + 14\%)\ U_0 - 7 \iff U_1 = 1,14 \times 120 - 7$

=> $U_1 = 129,8 \approx 130$ contrats souscrits.

Ainsi, une estimation du nombre de contrats d'entretien souscrits en 2018 est d'environ: 130.

2. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
n ← 0
u ← 120
Tant que  u ⩽ 190
    | n ← n + 1
    | u ← 1,14 x u - 7
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

2. b. Déterminons l'année affichée en sortie de l'algorithme et interprétons:

Pour répondre à cette question, nous allons dresser un tableau:

n	0	1	2	3	4	5	6
U_n	120	130	141	154	168	185	204

Nous nous arrêtons quand $n = 6$ car c'est à partir de cette année-là que le nombre de contrats souscrits dépassera 190.

En effet: 204 contrats souscrits > 190 contrats souscrits.

Ainsi, la valeur affichée en sortie de cet algorithme est de:

204 contrats souscrits en 2017 + " 6 " = **2023**.

En d'autres termes, à partir de l'année 2023, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel car le nombre de contrats souscrits dépassera 190.

3. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$V_n = U_n - 50 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 50$

$\iff V_{n+1} = (1,14\, U_n - 7) - 50 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 50 \Rightarrow V_0 = 120 - 50 = 70$ et $U_n = V_n + 50$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (1,14\,[V_n + 50] - 7) - 50$

$\Rightarrow V_{n+1} = 1,14\, V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,14$ et de premier terme $V_0 = 70$.

3. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 1,14\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (1,14)^n, \text{ avec: } V_0 = 70.$$

3. b. b2. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n, $U_n = 70 \times 1,14^n + 50$:

Nous savons que: * $V_n = 70 \times (1,14)^n$

* $U_n = V_n + 50$.

D'où: $U_n = 70 \times (1,14)^n + 50$.

3. c. Résolvons l'inéquation $U_n > 190$ et interprétons:

Nous allons déterminer " x " tel que: $U_x > 190$.

$$U_x > 190 \iff 70 \times (1,14)^x + 50 > 190$$

$$\iff (1,14)^x > 2$$

$$\iff x \cdot \ln(1,14) > \ln(2)$$

$$\iff x > \frac{\ln(2)}{\ln(1,14)}, \text{ car: } 1,14 > 1, \text{ et donc: } \ln(1,14) > 0$$

$\Rightarrow x > 6$, car x est un entier naturel.

En conclusion: à partir de l'année **2023 (2017 + 6)**, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel car le nombre de contrats souscrits dépassera **190**.

On retrouve ainsi le résultat trouvé à la question **2. b.**