Maths Complémentaires Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE PARC AUTOMOBILE

CORRECTION

1. Expliquons pourquoi pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,75\ U_n + 3000$:

- D'après l'énoncé, au 1er mars 2015, le loueur de voitures dispose de 10 000 voitures pour l'Europe.

D'où: $U_0 = 10000$.

- De plus, chaque année leur nombre baisse de 25% et augmente de 3000 nouvelles voitures neuves.

Soient:
- U_{n+1}, le nombre de voitures au 1er mars (2015 + (n + 1)),
- U_n, le nombre de voitures au 1er mars (2015 + (n)).

Pour tout entier naturel n, le nombre U_{n+1} de voitures est égal au nombre U_n de voitures diminué de 25% et augmenté de 3000 " nouvelles voitures neuves. "

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 25\%\ U_n + 3000 \iff U_{n+1} = 0,75\ U_n + 3000$.

2. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 12000 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 12000$

$\iff V_{n+1} = (0,75\ U_n + 3000) - 12000 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 12\,000$ => $V_0 = -2\,000$ et $U_n = V_n + 12\,000.$

Ainsi: (1) <=> $V_{n+1} = (0,75\,[V_n + 12\,000] + 3000) - 12\,000$

=> $V_{n+1} = 0,75\; V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $V_0 = -2\,000.$

2. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,75\; V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,75)^n, \quad \text{avec:} \quad V_0 = -2\,000.$$

En d'autres termes: $V_n = -2\,000 \times (0,75)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. b. b2. Déterminons la limite de la suite (V_n):

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} -2\,000 \times (0,75)^n$$

$$= 0 \quad \text{car:} \quad \lim_{n \to +\infty} (0,75)^n = 0, \quad \text{car:} \quad 0,75 \in \,]0, 1[.$$

Donc la suite (V_n) est convergente et converge vers " 0 ".

2. c. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_n = 12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n$:

Nous savons que: * $V_n = -2\,000 \times (0,75)^n$

* $U_n = V_n + 12\,000.$

D'où: $U_n = 12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n.$

2. d. Que pouvons-nous conjecturer au bout d'un grand nombre d'années cad quand n tend vers $+\infty$?

Nous savons que: • $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ et • $U_n = 12\,000 - V_n.$

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 12\,000 - V_n$

$= 12\,000 - 0$

$= 12\,000$ voitures présentes dans le parc.

Donc la suite (U_n) est convergente et converge vers " 12 000 " voitures.

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand), le nombre de voitures présentes dans le parc tendra vers 12 000.

3. a. Complétons l'algorithme afin qu'il permette de répondre au problème:

L'algorithme complété est le suivant:

Initialisation:

...

...

Traitement:

Tant que $U < 11950$ faire

N prend la valeur N + 1

U prend la valeur 0, 75 U + 3000

Fin du Tant que

Sortie:

Afficher N

3. b. Déterminons l'année recherchée:

A l'aide d'une machine à calculer, nous obtenons:

2015 + 13, cad: 2028.

En effet: $U_{13} \approx 11952 > 11950$.

En définitive, en 2028, le parc automobile comptera au moins 11950 voitures.

3. c. Résolvons l'inéquation $12000 - 2000 \times (0,75)^n \geq 11950$:

$$12000 - 2000 \times (0,75)^n \geq 11950$$

$$\iff -2000 \times (0,75)^n \geq -50$$

$$\iff 2000 \times (0,75)^n \leq 50$$

$$\iff (0,75)^n \leq \frac{5}{200}$$

$$\iff n \ln(0,75) \leq \ln\left(\frac{1}{40}\right)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{40}\right)}{\ln(0,75)}, \quad \text{car: } 0,75 \in]0, 1[, \quad \text{et donc: } \ln(0,75) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 13, \quad \text{car } n \text{ est un entier naturel.}$$

Au total, nous retrouvons la même réponse qu'à la question précédente, à savoir: l'année 2028 (2015 + 13 ans).