Maths Complémentaires Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE NOUVEAU LYCÉE

CORRECTION

1. a. Calculons le nombre d'élèves qui seront inscrits en 2014:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 30\%)\ U_0 + 300 \iff U_1 = 0,7 \times 500 + 300$

$\Rightarrow U_1 = 650$ élèves.

Ainsi, en 2014, il y aura: 650 élèves dans le nouveau lycée.

1. b. Calculons le nombre d'élèves qui seront inscrits en 2015:

Il s'agit de calculer U_2.

$U_2 = (1 - 30\%)\ U_1 + 300 \iff U_2 = 0,7 \times 650 + 300$

$\Rightarrow U_2 = 755$ élèves.

Ainsi, en 2015, il y aura: 755 élèves dans le nouveau lycée.

2. Justifions que, pour tout entier n, $U_{n+1} = 0,7\ U_n + 300$:

- D'après l'énoncé, le lycée a 500 élèves en 2013.

D'où: $U_0 = 500$.

- De plus, chaque année 30% des élèves partent et 300 nouveaux élèves arrivent.

Soient: • U_{n+1}, le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $(2013 + (n + 1))$,

- U_n, le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $(2013 + (n))$.

Pour tout entier naturel n, le nombre d'élèves inscrits " U_{n+1} " est égal au nombre d'élèves inscrits " U_n " diminué de 30% et augmenté de 300 " nouveaux élèves. "

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 30\%\ U_n + 300 \iff U_{n+1} = 0,7\ U_n + 300.$

3. Déterminons en justifiant l'algorithme choisi:

Nous retiendrons l'algorithme n°2 car:

pour un entier donné n, il affiche tous les termes de la suite (U_n) du rang 0 au rang n. Il effectue ainsi $(n+1)$ affichages de la variable u donnant la valeur de U_n.

4. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 1000 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 1000$

$\iff V_{n+1} = (0,7\ U_n + 300) - 1000 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 1000 \Rightarrow V_0 = -500$ et $U_n = V_n + 1000.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,7\,[V_n + 1000] + 300) - 1000$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,7\ V_n$ ou $V_n = -500 \times (0,7)^n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $V_0 = -500$.

4. b. Déduisons-en que pour tout entier n, $U_n = 1000 - 500\,(0,7)^n$:

Nous savons que: * $V_n = -500 \times (0,7)^n$

* $U_n = V_n + 1000$.

D'où: $U_n = (-500 \times (0,7)^n) + 1000$,

cad: $U_n = 1000 - 500 \times (0,7)^n$.

4. c. Déterminons la limite de (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 1000 - 500 \times (0,7)^n$$

$= 1000$ car: $\lim_{n \to +\infty} (0,7)^n = 0$, car: $0,7 \in]-1, 1[$.

Au total: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1000$ élèves.

4. d. Interprétation:

Cela signifie que dans n années (" n " très grand), il y aura: 1000 élèves dans le nouveau lycée.

5. a. Résolvons $U_n \geqslant 990$:

$U_n \geqslant 990 \iff 1000 - 500\,(0,7)^n \geqslant 990$

$\iff -500\,(0,7)^n \geqslant -10$

$\iff 500\,(0,7)^n \leqslant 10$

$\iff (0,7)^n \leqslant \dfrac{1}{50}$

$\iff n\,\ln(0,7) \leqslant -\ln(50)$

$\iff n \geqslant \dfrac{-\ln(50)}{\ln(0,7)}$, car: $0,7 \in]0, 1[$, et donc: $\ln(0,7) < 0$

$\Rightarrow n \geqslant 10,97$.

Nous prendrons $n = 11$ ans car n est un entier naturel.

5. b. Interprétation:

Cela signifie que dans 11 ans, cad à partir de 2024, le nouveau lycée comptera plus de 990 élèves.