Maths Complémentaires Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE JARDINIER FURIEUX !

CORRECTION

1. Déterminons la superficie de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 10\%)\ U_0 + 4 \iff U_1 = 0,9 \times 120 + 4$

$\implies U_1 = 122\ m^2.$

Ainsi, la superficie (en m^2) de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018 est de: 122.

2. Recopions et complétons les lignes L_1, L_3, L_4 et L_7 de cet algorithme:

Les lignes L_1, L_3, L_4 et L_7 complétées sont les suivantes:

- L_1: U prend la valeur 120
- L_3: Tant que $U > 60$
- L_4: | U prend la valeur $0,9 \times U + 4$
- L_7: Afficher $2017 + N$

3. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et déterminons V_0:

$V_n = U_n - 40 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 40$

$\iff V_{n+1} = (0,9\ U_n + 4) - 40 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 40$ => $V_0 = 80$ et $U_n = V_n + 40$.

Ainsi: (1) <=> $V_{n+1} = (0,9\,[\,V_n + 40\,] + 4) - 40$

=> $V_{n+1} = 0,9\ V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = 80$.

3. b. Exprimons V_n en fonction de n, pour tout entier naturel n:

Comme $V_{n+1} = 0,9\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0\ (0,9)^n, \text{ avec: } V_0 = 80.$$

3. c. Justifions que $U_n = 80 \times 0,9^n + 40$, pour tout entier naturel n:

Nous savons que: * $V_n = 80 \times (0,9)^n$

* $U_n = V_n + 40$.

D'où: $U_n = 80 \times 0,9^n + 40$.

4. a. Résolvons l'inéquation $80 \times 0,9^n + 40 \leqslant 60$:

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $U_n \leqslant 60$.

$U_n \leqslant 60$ <=> $80 \times 0,9^n + 40 \leqslant 60$

<=> $80 \times 0,9^n \leqslant 20$

<=> $(0,9)^n \leqslant 0,25$

<=> $n \ln(0,9) \leqslant \ln(0,25)$

<=> $n \geqslant \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)}$, car: $0,9 \in \,]\,0, 1\,[$, et donc: $\ln(0,9) < 0$

=> $n \geqslant 13,157$

$\Rightarrow$ $n \geq 14$ car n est un entier naturel.

Ainsi, 14 ans après le 1er janvier 2017, la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon sera inférieure à 60 m^2.

En d'autres termes, à partir de 2031, la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon sera inférieure à 60 m^2.

4. b. Déduisons-en l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier 2017:

La superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier 2017 ssi : $U_n \leq \frac{120}{2}$.

Cela revient à déterminer " n " tel que: $U_n \leq 60$.

Or, à la question précédente, nous avons vu que dans ce cas: $n = 14$.

Au total, l'année demandée est donc: 2017 + " 14 " cad 2031.

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ?

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 80 \times (0,9)^n + 40$$

$$= 40 \quad \text{car:} \lim_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0, \text{ car: } 0,9 \in \,]0,1[.$$

La suite (U_n) est donc convergente et converge vers 40 m^2.

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand) la superficie envahie par la plante sera au minimum de 40 m^2.

Donc non, le jardinier n'y arrivera pas.