Maths Complémentaires Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE BARRAGE

CORRECTION

1. a. Calculons le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 + 6\%)\ U_0 - 0,15 \iff U_1 = 1,06 \times 6,05 - 0,15$

$\Rightarrow U_1 = 6,263$ mètres ou: $U_1 = 626,3$ cm.

Ainsi, le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi est de: 626, 3.

1. b. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1,06\ U_n - 15$:

- D'après l'énoncé, le niveau d'eau du lac le 1er janvier 2018, à midi, était de 6, 05 mètres.

D'où: $U_0 = 6,05$ mètres ou: $U_0 = 605$ cm.

- De plus, chaque jour, le niveau d'eau du lac évolue comme suit:
  - une augmentation de 6% du niveau d'eau grâce à la rivière,
  - et, une baisse de 15 cm du niveau d'eau à cause d'un écoulement à travers le barrage.

Soient:
- U_{n+1}, le niveau d'eau du lac à midi, en cm, (n+1) jours après le 1er janvier 2018,
- U_n, le niveau d'eau du lac à midi, en cm, (n) jours après le 1er janvier 2018.

Pour tout entier naturel n, le niveau d'eau du lac à midi, en cm, U_{n+1} est égal à celui U_n augmenté de 6% et diminué de 15 cm.

Pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n + 6\%\ U_n - 15 \Rightarrow U_{n+1} = 1,06\ U_n - 15.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 1,06\ U_n - 15$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 1, 06 et précisons V_0:

$V_n = U_n - 250 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 250$

$\iff V_{n+1} = (1,06\,U_n - 15) - 250 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 250 \Rightarrow V_0 = 605 - 250 = 355$ et $U_n = V_n + 250.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (1,06\,[V_n + 250] - 15) - 250$

$\Rightarrow V_{n+1} = 1,06\,V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $V_0 = 355$ cm.

2. b. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 355 \times 1,06^n + 250$:

Nous savons que: * $V_n = 355 \times (1,06)^n$ (d'après le cours)

* $U_n = V_n + 250.$

D'où: $U_n = 355 \times (1,06)^n + 250.$

3. a. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 355 \times (1,06)^n + 250$$

$$= +\infty \quad \text{car:} \quad \lim_{n \to +\infty} (1,06)^n = +\infty, \quad \text{car:} \quad 1,06 > 1.$$

La suite (U_n) est donc: divergente (cad pas convergente).

3. b. L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau:

Oui, l'équipe d'entretien devra ouvrir les vannes un jour x afin de réguler le niveau d'eau.

En effet, un certain jour x le niveau du lac dépassera forcement 10 mètres

car: $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

4. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
N ← 0
U ← 605
Tant que U < 1000 faire
    | U ← 1,06 x U - 15
    | N ← N + 1
Fin Tant que
```

4. b. Déterminons ce que contient la variable N, à la fin de l'exécution:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer " x " tel que:

$U_x \geqslant 1000$. **(1000 cm = 10 mètres)**

$$U_x \geqslant 1000 \iff 355 \times (1,06)^x + 250 \geqslant 1000$$

$$\iff 355 \times (1,06)^x \geqslant 750$$

$$\iff (1,06)^x \geqslant \frac{750}{355}$$

$$\iff x \cdot \ln(1,06) \geqslant \ln\left(\frac{750}{355}\right)$$

$$\iff x \geqslant \frac{\ln\left(\frac{750}{355}\right)}{\ln(1,06)},$$ car: $1,06 > 1$, et donc: $\ln(1,06) > 0$

$\Rightarrow x \geqslant 13$, car x est un entier naturel.

Ainsi, **13 jours** après le 1er janvier 2018, l'équipe de techniciens interviendra.

En d'autres termes, le **14 janvier 2018**, le niveau du lac dépassera 10 mètres cad 1000 cm.

4. c. Déduisons la première date d'intervention des techniciens:

Comme dit précédemment: intervention le 14 janvier 2018.