

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA RETENUE D'EAU

CORRECTION

1. a. Montrons en justifiant que $V_1 = 95500 \text{ m}^3$:

$$\text{Nous avons: } V_1 = (V_0 - 4\% V_0) - (500).$$


 évaporation libération

$$\begin{aligned} \text{D'où: } V_1 &= V_0 (1 - 4\%) - 500 \iff V_1 = 0,96 \times 100\,000 - 500 \\ &\implies V_1 = 95\,500 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien: $V_1 = 95500 \text{ m}^3$.

1. b. Déterminons V_2 :

Il s'agit de calculer V_2 .

$$\begin{aligned} V_2 &= (V_1 - 4\% V_1) - 500 \iff V_2 = 0,96 \times 95\,500 - 500 \\ &\implies V_2 = 91\,180 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

- Ainsi:
- au matin du 2 juillet 2013, le volume d'eau sera de 95500 m^3 ,
 - au matin du 3 juillet 2013, le volume d'eau sera de 91180 m^3 .

1. c. Montrons que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,96 \times V_n - 500$:

- D'après l'énoncé, au 1^{er} juillet 2013, le volume d'eau en m^3 est de 100 000.

$$\text{D'où: } V_0 = 100\,000 \text{ m}^3.$$

- De plus, chaque jour le volume total de l'eau baisse de 4% (évaporation) et diminue parallèlement de 500 m^3 (libération).

- Soient:
- V_{n+1} , le volume d'eau en m^3 au matin du $(n+1)$ -ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013,
 - V_n , le volume d'eau en m^3 au matin du (n) -ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013.

Pour tout entier naturel n , le volume d'eau V_{n+1} est égal au volume d'eau V_n diminué de 4% et de 500 m^3 .

Donc pour tout entier naturel n :

$$V_{n+1} = (V_n - 4\% V_n) - (500) \Leftrightarrow V_{n+1} = 0,96 V_n - 500.$$

2. Recopions et complétons les lignes L_6 , L_7 et L_9 :

Les lignes L_6 , L_7 et L_9 complétées sont les suivantes:

- L_6 : Affecter à V la valeur $0,96 \times V - 500$
- L_7 : Affecter à N la valeur $N + 1$
- L_9 : Sortie: Afficher N

3. a. Montrons que (U_n) est géométrique et déterminons U_0 et q :

$$\begin{aligned} U_n = V_n + 12500 &\Leftrightarrow U_{n+1} = V_{n+1} + 12500 \\ &\Leftrightarrow U_{n+1} = (0,96 V_n - 500) + 12500 \quad (1). \end{aligned}$$

Or: $U_0 = V_0 + 12500 \Rightarrow U_0 = 112500$ et $V_n = U_n - 12500$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow U_{n+1} = (0,96 [U_n - 12500] - 500) + 12500 \\ &\Rightarrow U_{n+1} = 0,96 U_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $U_0 = 112500$.

3. b. Exprimons U_n en fonction de n :

Comme $U_{n+1} = 0,96 U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = U_0 \times (0,96)^n, \text{ avec: } U_0 = 112.500.$$

3. c. Déduisons-en V_n , pour tout entier naturel n :

Nous savons que: * $U_n = 112.500 \times (0,96)^n$

$$* V_n = U_n - 12.500.$$

D'où: $V_n = 112.500 \times (0,96)^n - 12.500.$

4. a. Résolvons l'inéquation dans l'ensemble des entiers naturels:

$$V_n \leq 0 \Leftrightarrow 112.500 \times (0,96)^n - 12.500 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,96) \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,96) \leq -\ln(9)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(9)}{\ln(0,96)} \text{ car: } 0,96 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,96) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 54, \text{ car } n \text{ est un entier naturel.}$$

Les solutions de l'inéquation est l'ensemble des entiers naturels avec $n \geq 54$.

4. b. Interprétation:

Cela signifie qu'à partir du 54^{ème} jour (1^{er} juillet 2013 + 54 jours) au delà du 1^{er} juillet 2013, la retenue d'eau artificielle sera vide.