

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

LA QUALITÉ DE L'EAU

ÉNONCÉ

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} (milligramme par litre), doit être comprise entre 140mg.l^{-1} et 180mg.l^{-1} .

Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de 160mg.l^{-1} .

On estime que la concentration du produit baisse d'environ 10% par semaine.

Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.

Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que:

- la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins;
- la quantité de produit consommée soit minimale.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 10mg.l^{-1} .

On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite (C_n) , le terme C_n donnant une estimation de la concentration du produit, en mg.l^{-1} , au début de la $n^{\text{ième}}$ semaine, avec $C_0 = 160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$.

2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par: $V_n = C_n - 100$.

a. Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $0,9$ et que $V_0 = 60$.

b. Exprimer V_n en fonction de n .

c. En déduire que pour tout entier naturel n , $C_n = 0,9^n \times 60 + 100$.

3. a. Déterminer la limite de la suite (C_n) quand n tend vers l'infini et interpréter.

b. Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140mg.l^{-1} ?

4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12mg.l^{-1} .

Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?